M. Nur Rianto Al-Arif, M.Si.

# MATEMATIKA TERAPAN UNTUK EKONOMI

M. Nur Rianto Al-Arif, M.Si.

# MATEMATIKA TERAPAN *untuk* EKONOMI



PS

Penerbit PUSTAKA SETIA Bandung

*Al-Arif, M. Nur Rianto, M.Si.*

MATEMATIKA TERAPAN UNTUK EKONOMI
M. Nur Rianto Al-Arif, M.Si.
Bandung: Pustaka Setia, 2013.
344 hlm.; 16 × 24 cm.

**ISBN 978–979–076–409–5**



| | | |
|---|---|---|
| Desain Cover | : | **Tim Redaksi Pustaka Setia** |
| Setting, Layout, Montase | : | **Tim Redaksi Pustaka Setia** |
| **Cetakan ke I** | : | **Desember, 2013** |
| Diterbitkan oleh | : | **CV PUSTAKA SETIA** |

Jl. BKR (Lingkar Selatan) No. 162–164
Telp. : (022) 5210588
Faks. : (022) 5224105
E-mail: pustaka_seti@yahoo.com
Website: www.pustakasetia.com
BANDUNG 40253

***(Anggota IKAPI Cabang Jawa Barat)***

# DAFTAR ISI

## BAB 2 SISTEM BILANGAN ➡ 43



## BAB 3 DERET ➡ 65

# BAB 1
# HIMPUNAN

## A. Peranan Matematika dalam Ekonomi

Berbagai kejadian dalam ekonomi saling berhubungan satu dengan yang lainnya, sehingga akan saling memengaruhi antar kejadian tersebut. Sebagai contoh, jika pendapatan seorang individu meningkat, maka pengeluaran untuk konsumsi akan meningkat. Contoh lain, misalkan terjadi kenaikan harga sedangkan pendapatan tetap, maka permintaan akan barang tersebut akan menurun.

Berbagai kejadian ekonomi tersebut dapat dinyatakan dengan perubahan nilai variabel. Variabel ialah sesuatu yang nilainya berubah-ubah, misalkan biaya, harga, kuantitas, pendapatan, dsb. Matematika berperan penting dalam menganalisis berbagai kejadian ekonomi tersebut. Dengan menggunakan matematika sebagai alat analisis, dapat diperoleh hasil analisis yang konkret, mudah untuk dipergunakan sebagai dasar perencanaa, alat pengendalian, dan dasar dalam melakukan evaluasi. Banyak sekali penggunaan matematika di dalam analisis kuantitatif, yaitu analisis yang memberikan hasil berupa angka.

Di dalam statistik ekonomi, matematika berguna untuk hal berikut (Supranto, 2005: 2-3):

1. Memahami rumus-rumus statistika, seperti rumus untuk menghitung jumlah, rata-rata, persentase, dan berbagai nilai koefisien
2. Memahami metode perkiraan, seperti *least square method* dan *maximum likelihood* yang memerlukan pengetahuan mengenai diferensial yang berguna untuk membuat suatu fungsi maksimum atau minimum
3. Memahami teori pengujian hipotesis, dimana diperlukan pengetahuan berbagai fungsi matematika untuk dipergunakan sebagai kriteria dalam pengujian seperti uji F, uji t, ataupun uji chi-square.
4. Memahami konsep nilai harapan yang memerlukan pengetahuan mengenai integral, dalam rangka menghitung rata-rata kerugian yang mungkin akan diderita atau rata-rata keuntungan yang dapat diperoleh

5. Memahami analisis regresi, dalam melihat pengaruh perubahan suatu variabel terhadap variabel lainnya.

Matematika merupakan cabang dari logika yang memberikan suatu kerangka kerja yang sistematis, dimana suatu hubungan secara kuantitatif dapat dipelajari. Namun harus dibedakan antara matematika murni dengan matematika terapan. Matematika murni, definisi atau aksioma dan asumsi dinyatakan secara tepat dengan menggunakan symbol, dan analisis berjalan dengan melalui deduksi guna memperoleh kesimpulan.

Matematika terapan berbeda dengan matematika murni, adapun perbedaannya terletak pada hal-hal berikut: simbol pada matematika murni simbol mewakili konsep yang abstrak, dimana sifat-sifat yang dimilikinya ditentukan dengan definisi; sedangkan pada matematika terapan, kebanyakan simbol dipergunakan mewakili variabel yang dapat dilihat dalam kejadian nyata, sifat-sifat yang dimiliki variabel-variabel ini harus ditentukan dengan observasi langsung, tidak dengan definisi yang sangat abstrak dan dinyatakan secara matematis; Ketelitian empiris dari deduksi dengan menggunakan matematika terapan dapat ditentukan, analisis matematika terapan didasarkan atas definisi dan asumsi yang ditentukan secara empiris dari suatu kesimpulan empiris yang diperoleh melalui deduksi. Analisis matematika murni dan terapan berbeda hanya pada aspek empiris tentang definisi, asumsi dan kesimpulan, tidak pada metode deduksi.

Analisis ekonomi didasarkan pada matematika terapan, hal ini menjadi sebab mengapa matematika perlu dipelajari agar dapat membuat analisis ekonomi secara matematis. Pada analisis ekonomi, deduksi yang diperoleh dengan analisis matematis harus diinterpretasikan dan dilakukan evaluasi secara empiris. Matematika memungkinkan ekonom untuk mendefinisikan variabel-variabel yang relevan secara tepat, asumsi yang dibuat dinyatakan secara jelas, menganalisis secara logis, dan mampu mempelajari pengaruh dari beberapa variabel terhadap satu atau beberapa variabel. Namun, matematika tidak dapat mencegah terjadinya pendefinisian variabel ataupun asumsi yang tidak akurat. Apabila analisis matematis memberikan hasil yang benar tetapi kesimpulannya salah secara empiris, maka definisi dan asumsi harus diteliti lagi untuk ketepatan dan kelengkapannya.

Matematika berkaitan dengan sesuatu yang dapat dihitung atau sesuatu yang dinyatakan dalam bentuk kuantitas (jumlah). Banyak sekali variabel-variabel (konsep) ekonomi yang bisa dikuantifikasikan seperti harga barang, jumlah barang yang diminta dan ditawarkan, jumlah uang beredar, tingkat marjin bagi hasil, pendapatan nasional, tingkat investasi, dan lain sebagainya. Matematika tidak hanya berperan dalam menguantifikasikan variabel-variabel ekonomi, tetapi juga menggali hubungan antara variabel-variabel ekonomi. Hubungan suatu variabel ekonomi dengan variabel-variabel ekonomi yang lain sering dinyatakan dalam bentuk model ekonomi. Oleh karena variabel-variabel ekonomi tersebut dapat dikuantifikasikan maka model ekonomi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk simbol/bentuk/model matematika.

Model merupakan penyederhanaan akan sesuatu yang sebenarnya terjadi. Bagaimana dari bentuk model sederhana tersebut bisa diturunkan dari suatu realitas di lapangan yang sebenarnya kompleks dan rumit. Asumsi-asumsi akan variabel-variabel ekonomi diterapkan untuk menyederhanakan sesuatu yang sebenarnya menjadi model ekonomi. Oleh karena itu, sebuah model pasti berbeda dengan yang sesungguhnya dalam hal ukuran, jumlah sebenarnya, tingkat kerumitan, dan tingkat kesempurnaan. Tetapi model bisa menyajikan apa yang penting dari keadaan sebenarnya. Sebuah model ekonomi merupakan penyederhanaan bentuk hubungan antar variabel ekonomi dari dunia nyata. Dalam konteks matematika ekonomi, model ekonomi merupakan himpunan matematik antar variabel-variabel ekonomi (Widodo, 2005: 2).

Terdapat banyak variabel ekonomi yang dapat diukur. Angka menunjukkan jumlah, sehingga dalam kerangka bilangan terdapat kemungkinan untuk menggunakan matematika sebagai sebuah alat untuk pembuatan model dalam ilmu ekonomi. Misalkan dalam teori keseimbangan pasar, terdapat keterkaitan antara tingkat harga dengan jumlah barang di pasar. Kata “jumlah” berkaitan dengan berapa banyak jumlah barang yang diperjualbelikan di pasar seperti pakaian, makanan, dan lain sebagainya. Produk-produk tersebut memiliki kardinalitas yang berarti dapat meletakkan sembarang angka pada jumlah yang kita amati. Ordinalitas juga merupakan salah satu sifat dari angka yang menunjukkan urutan sesuatu.

**B. Pengertian Himpunan/Kumpulan (*Set*)**

Dalam mempelajari matematika hal mendasar yang harus dipelajari terlebih dahulu ialah himpunan/kumpulan (*set*). Karena inilah pengetahuan mendasar dalam matematika yang turut memengaruhi dalam matematika ekonomi lebih lanjut. Segala sesuatu dalam alam dan alam hidup manusia terdiri atas himpunan/kumpulan (*set*).

Suatu himpunan/kumpulan (*set*) diartikan sebagai kumpulan atau kelompok suatu objek atau unsur yang dirumuskan secara tegas dan dapat dibeda-bedakan (Assauri, 2009: 1). Dengan kata lain, suatu objek yang dapat dikelompokkan atau dikumpulkan secara tegas ialah suatu himpunan (*set*)

Objek atau anggota-anggota himpunan/kumpulan (*set*) tersebut dinamakan unsur atau elemen. Notasi atau tanda dari suatu himpunan/*set* adalah dua kurung kurawal. Anggota-anggota atau unsur-unsur himpunan/*set* berada di dalam kurung tersebut.

*Contoh:*

Suatu himpunan (*set*) tiga kota besar di Sumatera yaitu Medan, Palembang dan Pekanbaru. Jadi: K = {Medan, Palembang, Pekanbaru}.

Atau:

Suatu himpunan (*set*) tiga ibukota negara ASEAN, yaitu Jakarta, Kuala Lumpur dan Bangkok. Jadi: I = {Jakarta, Kuala Lumpur, Bangkok}.

Atau

Suatu himpunan (*set*) mata dari sebuah dadu yang memiliki mata dadu sebagai berikut 1,2,3,4,5 dan 6. Jadi S = {1,2,3,4,5,6}.

Tiap objek yang secara kolektif membentuk suatu himpunan (*set*) disebut unsur atau elemen. Dengan demikian, tiap unsur/elemen merupakan anggota dari himpunan (*set*) tersebut. Misalnya saja x adalah suatu objek atau unsur, sedangkan S merupakan satu himpunan (*set*) dimana x tersebut menjadi anggotanya, maka x merupakan *anggota himpunan* (*set*) S, yang di dalam matematika dinyatakan dengan notasi: $x \in S$ yang artinya x merupakan unsur/elemen himpunan S. Sebaliknya, bila A *bukan merupakan* anggota himpunan (*set*) S, di dalam matematika dinyatakan dengan notasi: $A \notin S$ yang artinya, A bukan merupakan unsur/elemen himpunan S.

Dari contoh di atas, Didapatkan bahwa Surabaya bukan merupakan anggota atau unsur dari himpunan K (kota besar di Sumatera), jadi Surabaya ∉ K, karena Surabaya bukan merupakan kota besar yang terdapat di Sumatera melainkan terdapat di Jawa. Sedangkan kota Medan merupakan unsur himpunan K, atau dengan kata lain Medan ∈ K, hal ini karena Medan merupakan kota besar yang terdapat di Sumatera.

Atau, dengan contoh lain di atas diketahui bahwa Tokyo bukan merupakan anggota atau unsur dari himpunan I, jadi Tokyo ∉ I, Tokyo merupakan ibukota dari negara Jepang yang tidak menjadi anggota ASEAN. Sedangkan Jakarta merupakan unsur himpunan I, atau dengan bahasa matematika dapat dituliskan dengan Jakarta ∈ I, karena Jakarta merupakan ibukota salah satu negara ASEAN yaitu Indonesia.

Berdasarkan contoh lain di atas didapatkan bahwa 8 bukan merupakan anggota atau unsur dari himpunan (*set*) S. Jadi 8 ∉ S. Di lain pihak 4 merupakan unsur himpunan S, sehingga 4 ∈ S. Himpunan (*set*) S = {1,2,3,4,5,6} adalah himpunan yang terdiri dari 6 unsur atau elemen. Sementara itu, himpunan (*set*) A = {4} adalah himpunan yang terdiri dari satu unsur/elemen.

Suatu himpunan (*set*) dengan tidak ada unsur/elemen di dalamnya disebut *himpunan kosong (null set = empty set)*. Notasi dari himpunan kosong (*null set*) adalah Ø.

*Contoh:*

$$A = \emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ memenuhi } x^2 + 1 = 0\}$$

Karena tidak akan pernah ditemukan $x^2+1$ tersebut memiliki hasil sama dengan 0, maka himpunan A ialah himpunan kosong.

*Contoh:*

Suatu kelompok terdiri dari 3 atlet yang berprofesi sebagai pebasket. Maka, kita peroleh suatu himpunan (*set*) yang terdiri dari 3 unsur/elemen. Jika kita ambil hanya satu atlet yang sebagai pebasket, maka terdapat satu himpunan/*set* dengan satu elemen/unsur. Sementara itu, apabila kita ingin mendapatkan atlet yang berprofesi sebagai pesepakbola dari himpunan (set) tersebut, maka kita peroleh suatu himpunan (*set*) dengan tanpa elemen/unsur atau himpunan kosong (*null set*) yaitu Ø.

*Contoh:*

P = {x : x bilangan ganjil yang merupakan kuadrat dari bilangan genap}

P = Ø

P merupakan suatu himpunan kosong karena tidak akan pernah ditemui suatu bilangan ganjil yang merupakan kuadrat dari bilangan genap.

Apabila kita mempunyai satu himpunan (*set*) yaitu S = {-1,0,1}, akan didapatkan $0 \in S$. Sedangkan $2 \notin S$. Dalam hal ini: {0} adalah suatu himpunan (*set*) tanpa unsur/elemen.

**1. Cara Penulisan Suatu Himpunan (*Set*)**

Himpunan (*set*) pada umumnya ditandai/dilambangkan dengan huruf besar seperti A, B, C, P, R, S, M, N. Penulisan dari himpunan (*set*) tersebut dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu:

**a. Cara Daftar (*Raster Method*)**

Semua unsur/elemen himpunan (*set*) ditulis atau dinyatakan di antara tanda kurawal. Misalnya: suatu himpunan (*set*) S yang terdiri dari bilangan 1, 2,...,10, maka dapat ditulis sebagai:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

*Contoh:*

Suatu himpunan (*set*) mahasiswa yang mendapatkan nilai A pada mata kuliah matematika yaitu Ani, Umar, Widya, Hasan dan Husin, maka dapat ditulis sebagai: N = {Ani, Umar, Widya, Hasan, Husin}.

Atau:

Suatu himpunan (*set*) mahasiswa yang mendapatkan beasiswa untuk melanjutkan ke jenjang S2 ialah Arif, Yudhi, Lia, Zahra dan Endra, maka dapat dituliskan sebagai B = {Arif, Yudhi, Lia, Zahra, Endra}.

**b. Cara Kaidah (*Rule Method*)**

Syarat atau ketentuan yang harus dipenuhi oleh *set*iap objek agar dapat dinyatakan sebagai unsur/elemen himpunan (*set*) tersebut ditulis atau dinyatakan diantara tanda kurawal.

Dari contoh pertama pada metode Raster di atas dapat ditulis dengan cara kedua, yaitu:

S = {x : x ialah bilangan bulat dan $1 \leq x \leq 10$}.

Sedangkan, dari contoh kedua di atas dapat ditulis dengan cara kedua, yaitu:

N = {x : x mahasiswa yang mendapatkan nilai A pd matkul Matematika}.

Kemudian untuk contoh ketiga dapat dituliskan yaitu:

B = {x: x mahasiswa mendapatkan beasiswa S2}.

Perincian di atas berarti S, N dan B ialah himpunan (*set*) yang terdiri dari semua unsur/elemen x sedemikian rupa sehingga x menyatakan syarat-syarat/ketentuan-ketentuan yang harus dipenuhi objek x agar dapat merupakan unsur/elemen himpunan (*set*) S atau N atau B.

*Contoh:*

Apabila T = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan S merupakan himpunan yang terdiri dari angka-angka kuadrat dari unsur T, maka perincian S menjadi:

S = {1, 4, 9, 16, 25, 36}

Atau S = {$x^2$ : x merupakan unsur dari T}.

*Contoh*

Apabila K = {1, 3, 5, 7} dan L merupakan himpunan yang terdiri dari angka-angka pangkat tiga dari unsur K, maka perincian L menjadi:

L = { 1, 27, 125, 343}

Atau L = {$x^3$: x merupakan unsur dari K}

*Contoh:*

Jika V = {a, e, i, o, u} di mana himpunan V merupakan himpunan yang terdiri dari 5 huruf hidup, maka perincian atau penulisan himpunan V dengan menggunakan metode kaidah menjadi:

V = {x : x ialah huruf hidup dari 26 alpabet}

Bila M = {x : c adalah huruf abjad (alpabet)}

Maka V = {x : x ialah huruf hidup dari M}

*Cara daftar* merupakan cara yang paling sederhana guna memperinci himpunan (*set*). Apabila jumlah unsur elemen yang terdapat dalam himpunan (*set*) sangat besar atau banyak sekali, penggunaan *cara daftar* tidak lagi sederhana atau efisien. Misalkan kita mau membuat daftar mahasiswa yang memilih tinggal di tempat kost pada suatu perguruan tinggi negeri yang jumlah mahasiswanya bisa lebih dari 10.000 orang, maka dalam hal seperti ini, penggunaan *cara kaidah* akan lebih sederhana/efisien dibandingkan dengan metode daftar atau Raster.

## 2. Subhimpunan (Sub-*set*)

Seluruh objek yang dibahas atau ditinjau dalam suatu permasalahan membentuk suatu himpunan yang besar dan tetap. Himpunan itu disebut *himpunan universal* (himpunan semesta). Notasi dari himpunan universal dinyatakan dengan U. Dari himpunan universal dapat dibentuk himpunan-himpunan yang terdiri dari unsur atau unsur-unsur yang merupakan unsur dari himpunan universal. Himpunan yang demikian ini dinamakan *subhimpunan (sub-set/himpunan bagian)*.

Jadi suatu subhimpunan (sub-*set*) adalah suatu himpunan yang beranggotakan satu objek atau beberapa objek. Hal ini merupakan unsur atau unsur-unsur dari suatu himpunan atau himpunan universal.

Apabila himpunan A merupakan subhimpunan dari himpunan B, *set*iap unsur dari himpunan A juga merupakan unsur dari himpunan B. Notasi yang menyatakan bahwa himpunan T merupakan subhimpunan dari himpunan U ditantai dengan $A \subset B$.

*Contoh:*

Bila A ={d, e, f}; R = {1, 2, 3}

Dan B ={x : x adalah huruf abjad atau alpabet} maka $A \subset B$. Suatu himpunan R bukan merupakan subhimpunan (sub-*set*) dari himpunan B. Apabila unsur dari himpunan R bukan merupakan unsur dari himpunan B. Notasi yang menyatakan bahwa himpunan R bukan merupakan subhimpunan dari himpunan B ditandai dengan: $R \not\subset B$.

*Contoh:*

M = {a, e, i, o, u}

N = {x : x adalah bilangan bulat dan $1 \leq x \leq 10$}

Maka $M \not\subset N$.

*Contoh lain:*

P = {a, b, c, d}

Q = {x : x adalah bilangan bulat dan $1 \leq x \leq 100$}

R = {x : x adalah bilangan bulat genap $1 \leq x \leq 100$}

Maka: $P \not\subset Q$

$R \subset Q$

Dalam pembahasan subhimpunan, perlu kita perhatikan bahwa himpunan kosong (*null set*) dianggap pula subhimpunan (*set-set*) dari himpunan semula (himpunan kosong merupakan subhimpunan dari semua himpunan).

Jadi $\emptyset \subset P$ atau $\emptyset \subset Q$

Dengan dasar ini, suatu himpunan yang terdiri dari unsur himpunan semula dianggap juga sebagai subhimpunan (sub-*set*) dari himpunan semula ($S \subset S$).

Jadi bila S {a, b, c, d}

Maka $S \subset P$

Suatu himpunan (*set*) yang terdiri dari n unsur/elemen dapat dibentuk sebanyak 2" subhimpunan (sub-*set*). Pembentukan subhimpunan dari himpunan semula disebut *partisi himpunan (partition of set).*

Hubungan himpunan dengan sub-subhimpunan tersebut merupakan persoalan cakupan himpunan (*set inclusion*). Dalam hal ini suatu himpunan tertentu merupakan subhimpunan dari himpunan yang lain.

Dua buah himpunan yaitu $S_1$ dan $S_2$ adalah sama bila kedua himpunan tersebut mempunyai unsur-unsur/elemen-elemen yang sama. Kita nyatakan dengan $S_1 = S_2$ bila $S_1 \subset S_2$ dan $S_2 \subset S_1$.

Apabila salah satu dari kedua himpunan tersebut memiliki unsur yang tidak terdapat dalam himpunan lainnya, kedua himpunan tersebut tidak sama, dan kita nyatakan dengan: $S_1 \neq S_2$

$S_i$ dikatakan tercakup atau terkandung dalam S, atau $S_i$ adalah subhimpunan (*sub-set*) dari S, yaitu $S_i \subset S$. Apabila S terdiri dari sekurang-kurangnya satu unsur yang tidak terdapat dalam $S_i$. Maka dalam hal ini $S_i \subset S$ dan $S_i \neq S$, dinamakan subhimpunan sejati atau subhimpunan sendiri (*proper sub-set*) dari S.

Apabila dikatakan himpunan dari semua bilangan bulat yaitu bilangan bulat positif, Ø dan negatif atau himpunan dari semua bilangan bulat positif atau bilangan alam, maupun himpunan dari semua bilangan rasionil, himpunan-himpunan ini merupakan himpunan yang tidak terhingga (*infinite set*). Anggota himpunan terdiri dari unsur yang tidak terhingga banyaknya. Di samping itu, terdapat himpunan yang anggotanya terdiri dari satu unsur yang disebut himpunan tunggal. Selanjutnya, himpunan yang tidak ada (nol) anggotanya yang disebut himpunan kosong atau himpunan nol (*null set*) yang ditantai dengan Ø.

Jika S adalah suatu himpunan tertentu, maka Ø ⊂ S.

Dalam hal ini, jika Ø ⊂ S adalah tidak benar, berarti Ø harus mempunyai suatu elemen/unsur yang tidak merupakan elemen/unsur dalam S. Akan tetapi, Ø tidak mempunyai elemen/unsur, sehingga Ø ⊂ S adalah benar. Selain itu, perlu pula diketahui bahwa Ø adalah unik (*unique*). Apabila Ø tidak unik, maka jika suatu himpunan kosong/nol (*null set*) Δ, tentunya Δ ≠ Ø. Ini berarti Δ harus berisi suatu unsur/elemen yang tidak terdapat dalam Ø. Akan tetapi, hal ini bertentangan atau kontradiksi bagi himpunan kosong Δ untuk berisi suatu unsur/elemen. Oleh karena itu Δ = Ø sehingga himpunan kosong (*null set*) adalah unik (*unique*). Cara lain untuk menggambarkan keunikan (*uniqueness*) adalah dengan menyatakan Ø dan Δ adalah dua himpunan yang kosong (*null set*). Dalam hal ini kita melihat bahwa Ø ⊂ Δ dan Δ ⊂ Ø. dengan ketentuan atau definisi kesamaan/identik dua buah himpunan, maka Ø = Δ. Dengan demikian, Ø atau himpunan kosong (*null set*) adalah unik (*unique*).

Misalkan A adalah suatu himpunan yang terdiri dari mahasiswa baru suatu fakultas. Sementara itu, B adalah himpunan dari mahasiswa baru dan mahasiswa tingkat akhir dari fakultas tersebut, dan C adalah himpunan dari seluruh mahasiswa pada fakultas itu. Maka:

A ⊂ B dan B ⊂ C serta A ⊂ C

Dari uraian dalam subhimpunan di atas dapatlah kita perhatikan beberapa hal:

| | |
|---|---|
| A ⊂ A | adalah cakupan himpunan (*set inclusion*) yaitu bayangan dirinya (*reflexive*). |
| A ⊂ B dan B ⊂ A | tidaklah dapat berlaku serentak atau simultan (catatan: bila A ⊂ B dan B < A, berarti A ⊂ = B). Dengan demikian, cakupan himpunan (*set inclusion*) adalah tidak simetris (*antisymetric*). |
| A ⊂ B dan B ⊂ C | maka A ⊂ C, ini berarti cakupan himpunan (*set inclusion*) adalah transitif (*transitive*). |

Bandingkan syarat-syarat atau ketentuan cakupan himpunan (*set inclusion*) dengan persamaan himpunan *set equivalence.*

| | |
|---|---|
| A = A | adalah persamaan himpunan (*set equivalence*) yang merupakan bayangan dirinya (*reflexive*). |

| | |
|---|---|
| A = B maka B = A | yang berarti persamaan himpunan (*set equivalence*) adalah simetris. |
| A = B; B = C maka A = C | yang berarti bahwa persamaan himpunan (*set equivalence*) adalah transitif. |

## C. Operasi Himpunan

Dalam analisis himpunan, perlu diperhatikan himpunan yang besar dan tetap. Himpunan ini beranggotakan seluruh objek yang dibicarakan sebagai unsurnya. Himpunan ini disebut himpunan universal (*universal set*), yang dinyatakan dengan notasi/tanda U.

### 1. Komplemen (*Complement*)

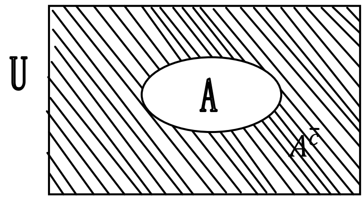
Seperti telah diuraikan sebelumnya bahwa suatu himpunan terdiri dari unsur yang juga merupakan unsur dari himpunan universal dan disebut subhimpunan (*sub-set*).

*Komplemen* dari himpunan tersebut adalah himpunan objek. Himpunan itu tidak merupakan unsur dari himpunan itu, tetapi merupakan unsur dari himpunan universalnya. Dengan kata lain: komplemen dari himpunan (*set*) A adalah himpunan yang terdiri dari unsur-unsur yang terdapat dalam himpunan universal U, tetapi tidak merupakan unsur dari himpunan A. Jadi, komplemen dari himpunan A merupakan subhimpunan yang lain dari A, tetapi merupakan pelengkap dalam himpunan universal U. Notasi atau tanda komplemen dari himpunan.

$A \ adalah \ A^c \ atau \ \frac{A'}{A}$

$A \ atau \ A' = \{x \ \in U : x \ \notin A\}$

Komplemen dari himpunan A ini dapat ditunjukkan dengan *menggunakan* gambar visual yang disebut diagram venn.




*Gambar 1.1. Diagram Venn Menunjukkan Hubungan antara U, A dan $A^c$*

Diagram Venn dimaksudkan untuk memudahkan memberi gambaran secara sistematis tentang hubungan-hubungan antar subhimpunan dalam suatu himpunan universal. Dalam diagram Venn, himpunan universal U ditunjukan dengan gambaran persegi panjang dan himpunan A dengan gambaran lingkaran Dilihat dari perumusan maka subhimpunan $A^c$ adalah:

$$A^c \ atau\ A' = U - A$$

*Contoh 1:*

P = {x: x adalah huruf abjad atau alphabet}

Q = {d, e, f, g}

R = (a, e, i, u, o} atau N = {x: x adalah huruf vokal}

maka, $Q^c$ = {a, b, c, h, …, z}

dan $R^c$ = {x: x adalah huruf konsonan}

*Contoh:*

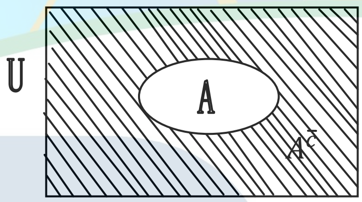
S = {a, c, e, 2, 4, 6}

$S_1$ = {c, 4}

$S_2$ = {a, c, e}

maka, $S_1^c$ = {a, e, 2, 6}

dan $S_2^c$ = {2, 4, 6}




*Contoh:*

J = {x : x adalah mahasiswa Uhamka}

K = {x: x adalah mahasiswa laki-laki Uhamka}

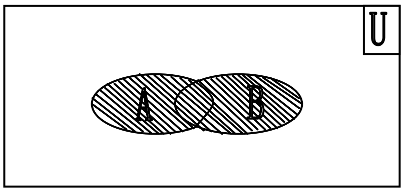
Maka, $K^c$ = {x: x adalah mahasiswi perempuan Uhamka}

**2. Gabungan (*Union*)**

Gabungan (*union*) dari dua buah himpunan adalah himpunan yang terdiri dari unsur-unsur. Unsur-unsurnya adalah yang paling sedikit dalam salah satu himpunan atau kedua-duanya. Dengan kata lain, *gabungan (union)* dari dua buah himpunan A dan B adalah himpunan-himpunan A atau B atau kedua-duanya. Notasi atau tanda gabungan (*union*) dari dua buah himpunan-himpunan A dan B dinyatakan dengan $A \cup B$. Perinciannya adalah:

$$A \cup B = \{x : x \in A\ atau\ x \in B\}$$

Gabungan (*union*) dari dua buah himpunan A dan B ditunjukkan dengan gambar dalam diagram Venn, seperti dapat dilihat pada Gambar 1.2.




*Gambar 1.2. Diagram Venn yang menunjukkan Union dari himpuan A dan B*

Sebenarnya operasi himpunan dengan gabungan (*union*) ini mengikuti asas penjumlahan, yaitu $A \cup B = A + B$

*Contoh:*

A = {2, 4, 6, 8}

B = {1, 3, 5, 7}

C = {8, 9, 10, 11}

maka $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

dan $A \cup C$ = {2, 4, 6, 8, 9, 10, 11}

dan $B \cup C$ = {1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11}

*Contoh:*

D = { Amir, Abu, Umar, dan Syahid}

E = {Ani, Putri, Yuni, dan Maryam}

Maka $D \cup E$ = {Amir, Abu, Umar, Syahid, Ani, Putri, Yuni, Maryam}

Sedangkan gabungan (*union*) dari tiga buah himpunan A, B, dan C merupakan:

$$A \cup B \cup C = \{\mathrm{x}: \mathrm{x} \in A \; atau \; x \in B \; atau \; x \in C\}$$

Dengan contoh di atas , maka

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

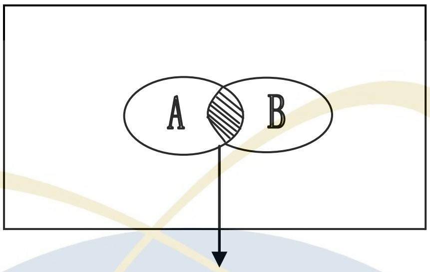
**3. Interseksi (*Intersection*)**

Interseksi (*intersection/irisan*) dari dua buah himpunan adalah himpunan yang terdiri dari unsur yang menjadi anggota, baik dari himpunan yang satu maupun dari himpunan lainnya. Interseksi (*intersection*) dari dua buah himpunan A dan B adalah himpunan objek yang merupakan unsur sekaligus atau serentak dari himpunan-himpunan A dan B. Jadi, interseksi dari dua buah himpunan A dan B merupakan subhimpunan yang sekaligus, baik dari himpunan A maupun B. Notasi atau tanda yang menyatakan interseksi dari dua buah himpunan adalah $\cap$. Dengan demikian, interseksi dari himpunan-himpunan A dan B dinyatakan dengan A $\cap$ B.

Persamaannya adalah:

$A \cap B = \{x : x \in A \; dan \; x \in B\}$

Interseksi dari dua buah himpunan A dan B dapat ditunjukkan dengan gambar dalam diagram Venn, seperti dapat dilihat pada Gambar 1.3.




$A \cap B$

*Gambar 1.3. Diagram Venn yang menunjukkan Interseksi dari Himpunan-himpunan A dan B*

Sebenarnya operasi himpunan dengan interseksi ini mengikuti asas perkalian, yaitu: $A \cap B = A \, x \, B$

*Contoh:*

A = {2, 4, 6, 8}

B = {1, 2, 3, 4}

C = {5, 6, 7, 8}

maka, $A \cap B$ = {2, 4}

$A \cap C$ = {6, 8}

$B \cap C$ = Ø

Sedangkan interseksi dari tiga buah himpunan A, B, dan C merupakan:

$A \cap B \cap C$ = {x: $x \in A \; dan \; x \in B \; dan \; x \in C$}

maka, $A \cap B \cap C$ = Ø

*Contoh:*

D = {a, i, u, e, o}

E = {a, b, c, d, e}

F = {e, f, g, h, i}

maka, $D \cap E$ = {a, e}

$D \cap F$ = {e, i}

$E \cap F$ = {e}

$D \cap E \cap F$ = {e}

*Contoh:*

G = {a, 1, b, 2, c, 3}

H = {a, b, c, d, e}

I = {1, 2, 3, 4, c, d, e}

Maka:

$G \cap H$ = {a, b, c}

$G \cap I$ = {1, 2, 3, c}

$H \cap I$ = {c, d, e}

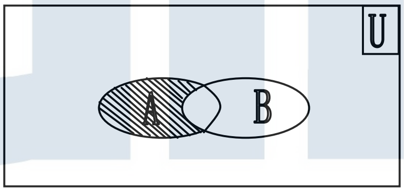
$G \cap H \cap I$ = {c}

**4. Selisih Himpunan (*Set Difference*)**

Selisih (*difference*) dari dua buah himpunan adalah himpunan (*set*) yang anggota-anggotanya terdiri dari unsur-unsur himpunan pertama, tetapi yang bukan merupakan unsur himpunan kedua. Dengan kata lain, selisih (*difference*) dari dua buah himpunan A dan B adalah himpunan dari objek yang merupakan unsur dari himpunan A. Akan tetapi, himpunan ini tidak merupakan unsur dari himpunan B. Notasi dan tanda selisih (*difference*) dari dua buah himpunan A dan B adalah A – B, dengan perincian:

$A - B = \{x :\in A \; dan \; x \; \notin B\}$

Selisih (*difference*) dari himpunan-himpunan A dan B dapat ditunjukkan dengan gambar dalam diagram Venn, seperti dapat dilihat pada gambar berikut.




*Gambar 1.4. diagram Venn yang Menunjukkan Selisih (Difference) dari Himpunan A dan B*

*Contoh:*

A = {2, 4, 6, 8, 10}

B = (1, 2, 3, a, b, c}

C = {8, 9, 10, c, d, e}

maka A – B = {4, 6, 8, 10}

A – C = {2, 4, 6}

B – C = {1, 2, 3, a, b}

B – A = {1, 3, a, b, c}

C – A = {9, c, d, e}

C – B = {8, 9, 10, d, e}

*Contoh:*

E = {x: x adalah huruf abjad atau alphabet}

F = {x: x adalah huruf hidup}

G = {x: x adalah a, b, c, d, e, f}

Maka, E – F = {x: x adalah huruf konsonan}

E – G = {x: x adalah huruf abjad dan bukan a, b, c, d, e, f}

F – G = {x: x adalah i, o, u}

G – F = {x: x adalah b, c, d, f}

## D. Hasil Kali Cartesian (*Cartesian Product*)

### 1. Kalimat Matematik

Dalam suatu persamaan, misalnya suatu variabel ditambah dengan empat sama dengan tujuh. Persamaan ini dapat ditulis dengan kalimat atau bahasa matematik yaitu:

X + 4 = 7

Maka, pemecahan persamaan ini adalah variabel x = 3. Hal ini juga dapat kita temui dalam himpunan (*set*).

Misalkan suatu himpunan S adalah:

S = {0, 1, 2……10}

Dan x ∈ S. Apabila kita ingin mencari x > 4, himpunannya akan menjadi

$$\{x \in S : x > 4\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Cara membacanya adalah himpunan dari seluruh x yang merupakan unsur dari himpunan S yang mempunyai nilai x > 4.

*Contoh:*

K = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Dan x ∈ K. Apabila kita ingin mencari x merupakan bilangan ganjil, himpunannya akan menjadi:

$$\{x \in S : x \; ialah \; bilang \; ganjil\} = \{3, 5, 7, 9\}$$

*Contoh lain:*

$$\{x \in S: x + 4 = 7\} = \{3\}$$

Cara membacanya adalah himpunan dari seluruh x ∈ S yang memenuhi x+4 = 7.

Dari uraian ini telah diperoleh himpunan-himpunan baru (subhimpunan) dengan menggunakan suatu kalimat matematis. Aksioma yang ditemui dalam hal ini adalah = bila telah diketahui suatu himpunan A maka kita dapat memperoleh himpunan B yang unsur-unsurnya akan memenuhi syarat-syarat S (x).

Dalam hal ini, S (x) menyatakan suatu kalimat matematis. Jadi, jika A = 4, 5, 6 dan S (x) adalah yang memenuhi syarat atau keadaan x > 4, maka hasilnya:

$$x \in A : \{x > 4\} = \{5, 6\} = B$$

Juga

$$x \in A : \{x > 5\} = \{6\} = B$$

Dan

$$x \in A : \{x > 6\} = \{\,\} = B = \emptyset$$

Dengan demikian operasi himpunan (*set operation*) yang menggunakan konsep ini adalah:

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \in S_1 atau\, x \in S_2\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \in S_1 dan\, x \in S_2\}$$

$$S = S_1 - S_2 = \{x : x \in S_1\, dan\, x \notin S_2\}$$

$$S_1 = S - S_2 = \{x : x \in S\, dan\, x \notin S_2\}$$

**2. Pasangan yang berurut (*Ordered Pairs*) dan Hasil Kali Cartesius (*Cartesian Product*)**

Dengan konsep kalimat matematis dan pasangan yang berurut, dapat merumuskan konsep hubungan (*relation*) yang akan mendasari konsep dari suatu fungsi. Dinyatakan bahwa {a, b} adalah suatu himpunan dari dua unsur. Diketahui pula bahwa:

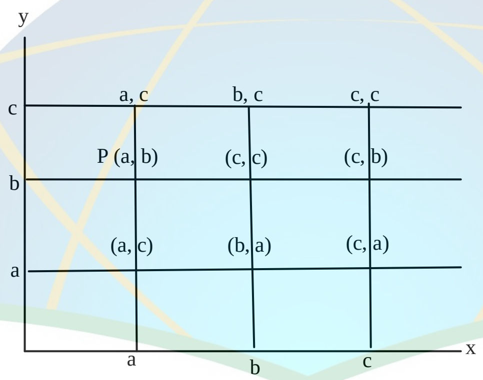
{a,b} = {b,a}

Yaitu dua buah himpunan yang sama (*equivalent*) dan susunan dari unsur-unsur tidak sama. Apabila kelompok dari dua unsur bersama-sama dalam suatu susunan tertentu, dicatat (a, b). Kelompok ini disebut pasangan unsur-unsur yang berurut (*the ordered pair*), di mana himpunan {a, a} sebenarnya adalah menjadi himpunan {a}.

Sedangkan dalam pasangan yang berurut ini, terlibat (a,b) ≠ c (b, a) jika a ≠ b.

Hal ini dapat digambarkan dengan menggunakan suatu grafik. Pada Gambar 1.5. terlihat ada tiga titik yang terdapat pada sumbu horizontal dan sumbu vertikal. Pasangan berurut (a, b) ditentukan sebagai titik P dan (b, a) sebagai titik Q. Dengan demikian, akan diperoleh pasangan-pasangan berurut dari angka (x, y) yang digambarkan sebagai suatu titik dalam bidang datar.

Dalam penggambaran tersebut, angka pertama x yang ditemui disebut x koordinat dan angka kedua disebut y koordinat (atau x adalah absis dan y adalah ordinat).




*Gambar 1.5.*

Dalam suatu himpunan tertentu:

S = {1, 2, 3}

maka, timbul pertanyaan beberapa banyak pasangan berurut yang dapat diperoleh dari himpunan S. Untuk menjawab pertanyaan ini kita dapat lakukan dengan pendekatan sebagai berikut.

Terdapat dua tempat dalam suatu pasangan yang berurut. Jika mempunyai tiga unsur atau elemen, didapatkan tiga pilihan di tempat pertama. Demikian pula halnya dengan tempat kedua, terdapat tiga pilihan. Dengan begitu, terdapat jumlah $3 \times 3 = 3^2 = 9$ pasangan yang berurut (*ordered pairs*). Hal ini dapat digambarkan dalam diagram sebagai berikut:

| *Tempat pertama* | *Tempat kedua* | *Pasangan yang tersusun* |
|---|---|---|
| | 1 | (1, 1) |
| 1 | 2 | (1, 2) |
| | 3 | (1, 3) |
| | 1 | (2, 1) |
| 2 | 2 | (2, 2) |
| | 3 | (2, 3) |
| | 1 | (3, 1) |
| 3 | 2 | (3, 2) |
| | 3 | (3, 3) |

Dengan $S_1$ = {1, 2, 3} dan $S_2$ ={4, 5}, maka berapa banyak pasangan berurut (x,y) yang dapat diperoleh di mana x merupakan anggota $S_1$ dan y anggota $S_2$? Dalam hal ini terdapat tiga pilihan untuk tempat pertama dan dua pilihan untuk tempat kedua, sehingga ada 3 x 2 = 6 pasangan yang berurut. Hal ini digambarkan sebagai berikut:

| *Tempat I* | *Tempat II* | *Pasangan yang tersusun* |
|---|---|---|
| | 4 | (1, 4) |
| 1 | | |
| | 5 | (1, 5) |
| | 4 | (2, 4) |
| 2 | | |
| | 5 | (2, 5) |
| | 4 | (3, 4) |
| 3 | | |
| | 5 | (3, 5) |

Umumnya, bila $S_1$ mempunyai *n* unsur dan $S_2$ mempunyani *m* unsur, dapat membentuk *m x n* pasangan yang berurut. Dalam contoh di atas, keenam pasangan tersusun yang diperoleh akan membentuk suatu himpunan di mana *set*iap pasangan yang berurut merupakan satu unsur atau elemen.

Himpunan dari pasangan yang berurut (*set of ordered pairs*) tersebut dinyatakan dengan:

$S_1$ x $S_2$ = {(x, y) : x ∈ $S_1$ dan y ∈ $S_2$}

$S_1$ x $S_2$ adalah himpunan dari pasangan yang berurut (x, y) dengan koordinat pertama x dari anggota $S_1$ dan koordinat kedua y dari anggota $S_2$.

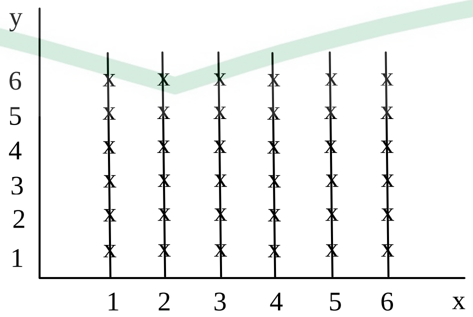
Pada umumnya, bila kita mempunyai dua himpunan A dan B, maka himpunan dari seluruh pasangan yang berurut (x, y), dapat diperoleh dari A dan B, di mana $x \in A$ dan $y \in B$, dinyatakan dengan A x B = {(x, y) : x ∈ A dan y ∈ B}. Himpunan ini disebut hasil kali cartesius (*cartesian product*) dari A dan B atau Himpunan Cartesius (*cartesian set*) dari A dan B dan dinyatakan dengan $A\ x\ B$.

Seperti pada uraian terdahulu, terlihat bahwa pasangan yang berurut (*ordered pairs*) ditunjukkan sebagai suatu titik dalam grafik. Hasil kali cartesius dapat juga digambarkan secara grafik. Sebagai contoh misalnya himpunan mata dadu:

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A merupakan himpunan hasil yang mungkin (*posibble outcomes*) bila sebuah dadu dilempar. Hasil kali cartesian A x A dapat digambarkan seperti pada Gambar 1.6. Dalam hal ini terdapat 6 x 6 = $6^2$ = 36 pasangan yang tersusun. Jadi pernyataan A x A adalah himpunan dari 36 hasil yang mungkin (*posibble outcmes*), bila sebuah dadu dilempar dua kali.

Jika A adalah himpunan dari seluruh titik pada suatu garis sumbu, maka, A x A merupakan himpunan dari seluruh pasangan yang tersusun pada bidang datar atau dengan perkataan lain seluruh bidang datar. Jadi, hasil kali cartesius (*cartesian product*) A x A atau $A^2$ apabila digambarkan terdapat dalam bidang datar yang berdimensi dua.




*Gambar 1.6. Hasil Kali Cartesian Dua Buah Dadu dilempar*

Terdapat kemungkinan untuk memperluas pasangan yang berurut dengan lebih dari dua unsur atau elemen. Dalam hal ini terdapat pasangan yang berurut tiga (*ordered triples*) untuk tiga unsur dan pasangan yang berurut empat (*ordered guadruples*). Jika digambarkan bahwa hasil kali cartesius (*cartesian product*) A x A x A atau $A^3$, akan terdapat pada bidang yang berdimensi tiga.

Sebagai contoh, himpunan S = {1, 2}. Dari himpunan ini didapatkan pasangan yang berurut tiga sebanyak dua pilihan untuk tempat pertama. Selanjutnya, dua pilihan untuk tempat kedua dan dua pilihan untuk tempat ketiga, atau 2 x 2 x 2 = $2^3$ = 8. Hal ini digambarkan sebagai berikut:

| *Tempat I* | *Tempat II* | *Tempat III* | *Pasangan yang tersusun* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | (1, 1, 1) |
| | | 2 | (1, 1, 2) |
| | 2 | 1 | (1, 2, 1) |
| | | 2 | (1, 2, 2) |
| 2 | 1 | 1 | (2, 1, 1) |
| | | 2 | (2, 1, 2) |
| | 2 | 1 | (2, 1, 1) |
| | | 2 | (2, 2, 2) |

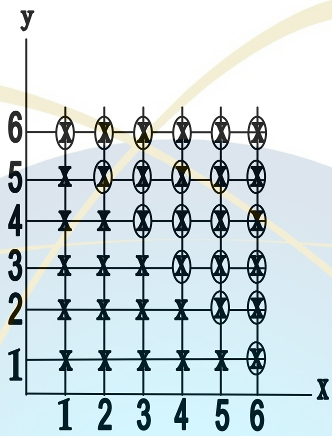
Perlu dicatat bahwa (2, 2, 2) adalah suatu pasangan berurut tiga yang menunjukkan suatu titik pada suatu bidang yang berdimensi tiga dari cartesian diagram, di mana {2, 2, 2} bukan merupakan himpunan dari unsur, tetapi suatu himpunan {2}. Pada umumnya, hasil perkalian cartesius (*cartesian product*) himpunan dari angka rill A sebanyak *n* kali. Hal ini akan memberikan gambaran pada bidang yang berdimensi *n*.

## E. Relasi dan Fungsi

Sebenarnya kita dapat menggunakan kalimat metematis dalam pasangan-pasangan yang tersusun untuk merumuskan atau menjelaskan relasi (*relation*). Misalkan kita menggambarkan 36 hasil yang mungkin (*posible outcomes*) dari sebuah dadu yang dilempar dua kali seperti terlihat pada Gambar.1.6. Bila A dan

B adalah himpunan dari hasil yang mungkin untuk pelemparan pertama dan kedua, yaitu:

A = B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan A x B adalah himpunan cartesian (*cartesian set*). Misalnya pasangan yang berurut dinyatakan dengan (x, y), di mana $x \in A \; dan \; y \in B$.




*Gambar 1.7. Hasil yang Mungkin dari Sebuah Dadu yang Dilempar Dua Kali*

Misalkan kalimat atau kondisinya sebagai berikut:

Jumlah dari hasil pelemparan pertama dan kedua adalah lebih besar dari 6 yang dinyatakan dengan x + y > 6. Dengan kalimat ini, didapatkan dua variabel. Nilai x dan y yang memenuhi kalimat matematis tersebut adalah:

(1, 6) (2, 5) (2, 6) (3, 4) (3, 5) (3, 6)

(4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6) (5, 2)

(5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6) (6, 1)

(6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

Pemecahan ini adalah pasangan-pasangan yang berurut dan digambarkan dengan tanda silang yang diberi kurung pada Gambar 1.7. Pasangan-pasangan yang tersusun tersebut membentuk suatu subhimpun (*sub-set*) dari P = A x B. Misalkan subhimpunan tersebut dinyatakan dengan R. Maka, subhimpunan R ditunjukkan dengan:

R = {(x,y) : x + y > 6; (x, y) ∈ P}

*Contoh lain,*

Misalnya: x + y = 6

Maka R = {(x, y) : x + y = 6; (e, y) ∈ P)

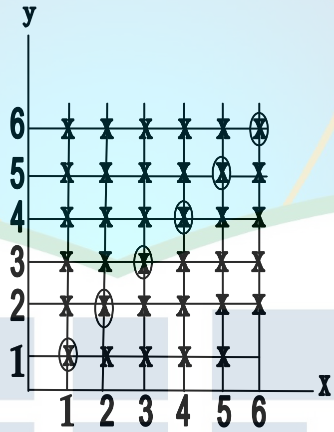
Yang merupakan himpunan dari pasangan-pasangan berurut.

{(1, 5); (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}

Pasangan-pasangan yang tersusun (berurutan) tersebut dapat dengan mudah terlihat pada gambar 1.6. Jadi, kalimat matematis dalam dua variabel, memilih pasangan yang tersusun (berurutan) dari hasil kali cartesius. Dengan demikian, pemilihan subhimpunan dari pasangan yang tersusun memenuhi persyaratan dalam kalimat tersebut. Subhimpunan R dari hasil kali cartesius disebut suatu *relasi.*

Marilah kita lihat beberapa contoh. Misalnya x = y. Dalam hal ini angka dari hasil mata dadu pada pelemparan pertama adalah sama dengan pelemparan kedua. Relasi R adalah:

$R = \{(x, y); x = y; (x, y) \in P\}$




*Gambar 1.8. Hasil Kali Cartesian*

Hasil pemecahan ini dapat dilihat pada gambar 1.8. Dengan kalimat matematis tersebut diperoleh himpunan dari pasangan-pasangan yang berurut {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} Berikut ini, diketahui x = 2y.

Dalam hal ini angka dari hasil mata dadu pada pelemparan pertama adalah dua kali dari hasil mata dadu pada pelemparan kedua. Relasi R adalah:

$R = \{(x, y); x = 2y; (x, y) \in P\}$

Dengan kalimat matematis ini didapatkan himpunan dari pasangan-pasangan yang berurut:

{(1, 2), (2, 4), (3, 6)}

Misalkan A adalah suatu himpunan dari angka-angka riil, maka relasi yang diperoleh dari x = y akan menjadi:

$R = \{(x, y); x = y; (x, y) \in P\}$

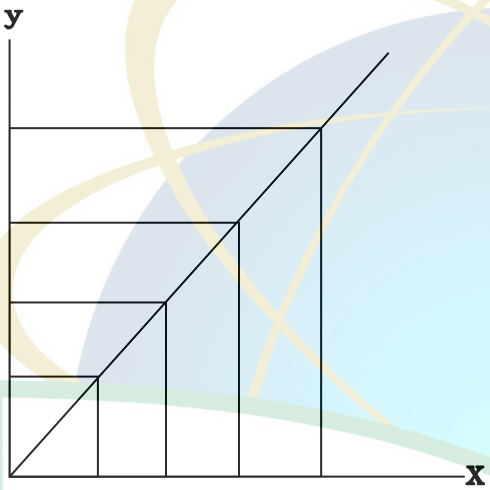
di mana P = A x A

Grafik himpunan ini adalah titik-titik yang terdapat dalam garis lurus. Gambar grafiknya dapat dilihat pada Gambar 1.9.

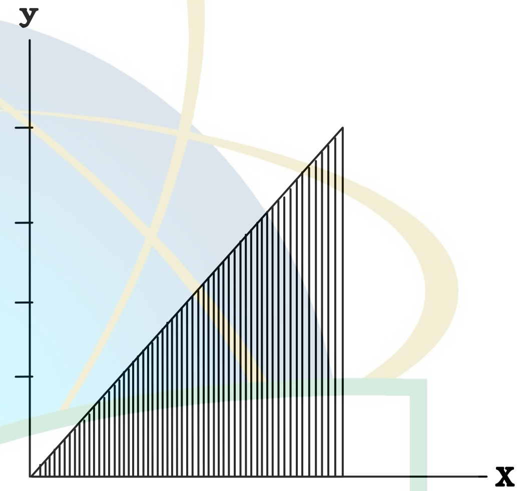
Relasi yang diperoleh dari: x > y > O akan menjadi:

$R = \{(x, y), x > y > O, (x, y) \in P\}$

Secara grafik, himpunan ini digambarkan sebagai daerah bagian yang tercakup di bawah garis lurus. Hal ini dapat dilihat pada gambar 1.10.




*Gambar 1.9. Hasil Kali Cartesian*




*Gambar 1.10. Hasil Kali Cartesian*

Dari uraian di atas, terlihat bahwa relasi (=R) adalah suatu himpunan pasangan yang tersusun (berurutan). Himpunan dari x yang dipasangkan dengan y dalam (x, y) merupakan anggota dari R. Himpunan dari x ini dinamakan wilayah (domain) dari relasi R. Subhimpunan dari x yang dinamakan wilayah (domain) dari R dinyatakan dengan:

$\{x : untuk\ beberapa\ y,\ (x, y) \in R\}$

Demikian pula halnya dengan subhimpunan dari y dalam pasangan yang tersusun (berurutan) yang merupakan anggota dari R dinamakan jarak atau jangkauan (*range*) dari R dinyatakan dengan:

$\{y : untuk\ beberapa\ x, (x, y) \in R\}$

Dalam hal khusus dari suatu relasi, di mana *set*iap x atau beberapa x yang hanya dikaitkan dengan satu y disebut *fungsi*. Jadi, suatu fungsi adalah suatu himpunan pasangan yang berurutan/tersusun dengan subhimpunan x sebagai wilayah (domain) dari R. Subhimpunan y sebagai jarak/jangkau (*range*) dari R tersebut.

Dengan kata lain, suatu fungsi adalah suatu relasi (yaitu subhimpunan dari pasangan yang berurutan/bersusun); *set*iap unsur $x \in X$ dengan suatu unsur yang unik $y \in Y$.

Tanda atau simbol untuk menyatakan suatu fungsi adalah:

$f : x \rightarrow y$

yang dibaca sebagai: f adalah fungsi yang menghubungkan x terhadap y. Untuk jelasnya, lihat kembali pengertian atau definisi suatu fungsi. Suatu fungsi adalah suatu relasi (yaitu suatu subhimpunan dari pasangan yang berurut) yang mengikuti sifat-sifat atau ciri-ciri sebagai berikut:

1) Wilayah (domain) dari f yaitu *set* dari x yang dipasangkan dengan y dalam (x, y) adalah sama untuk X.
2) Untuk setiap x mempunyai satu (*unique*) $y \in Y$.

Untuk menunjukkan persekutuan di antara unsur x dan unsur y yang dihubungi/dimiliki dari pasangan berurut (x, y) adalah suatu unsur dari fungsi (subhimpunan) f, ditulis: $f(x) = y$. Himpunan dari unsur y yang dihubungkan untuk x dari $f(x) = y$ adalah jarak/jangkau (*range*) dari fungsi f.

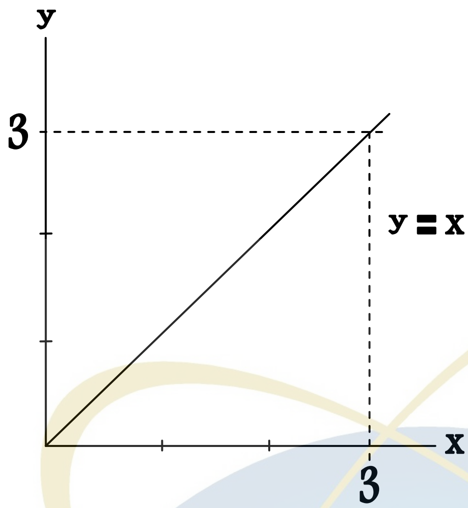
Apabila digunakan istilah fungsi dan tanda atau simbol $y = f(x)$, x adalah pernyataan (*argument*) dan y adalah nilai (*value*) dari fungsi f. Fungsi seperti $y = f(x)$ kadang-kadang disebut fungsi titik (*point functions*) karena x dapat dianggap sebagai suatu titik pada suatu garis.

F (A) kadang-kadang disebut suatu fungsi himpunan karena A adalah suatu himpunan.

Sebagai contoh, fungsi $y = x$, di mana himpunannya adalah:

$\{(x, y) : y = x; (x, y) \in R\}$

Gambar grafiknya dapat dilihat pada Gambar 1.11. Titik-titik yang terdapat pada grafik tersebut antara lain adalah (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3).




*Gambar grafik 1.11*

**F. Kaidah-Kaidah Matematika dalam Pengoperasian Himpunan**

1. Kaidah Idempoten
   a. $A \cup A = A$
   b. $A \cap A = A$
2. Kaidah asosiatif
   a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Kaidah Komutatif
   a. $A \cup B = B \cup A$
   b. $A \cap B = B \cap A$
4. Kaidah distributif
   a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. Kaidah identitas
   a. $A \cup \emptyset = A$
   b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
   c. $A \cup U = U$
   d. $A \cap U = A$

6. Kaidah kelengkapan
    a. $A \cup A^c = U$
    b. $A \cap A^c = \emptyset$
    c. $(A^c)^c = A$
    d. $U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$
7. Kaidah De Morgan
    a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

**Latihan Soal:**

1. Bila diketahui himpunan-himpunan sebagai berikut:

   A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30}

   B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

   C = (1, 2, 3, 4, 5, a, e, i, u, o}

   D = (a, b, c, d, e, f, 6, 7, 8, 9, 10}

   Maka carilah:

   a) Gabungan (*union*) dari himpunan-himpunan A dan B = $A \cup B$

      $A \cup B$: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30}

   b) Gabungan (*union*) dari himpunan-himpunan A dan C = $A \cup C$

      $A \cup C$ :{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, a, e, i, u, o}

   c) Gabungan (*union*) dari himpunan-himpunan A dan D = $A \cup D$

   d) Gabungan (*union*) dari himpunan-himpunan B dan C = $B \cup C$

   e) Gabungan (*union*) dari himpunan-himpunan B dan D = $B \cup D$

   f) Gabungan (*union*) dari himpunan-himpunan C dan D = C $\cup D$

   A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30}

   B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

   C = (1, 2, 3, 4, 5, a, e, i, u, o}

   D = (a, b, c, d, e, f, 6, 7, 8, 9, 10}

2. Berdasarkan himpunan yang terdapat pada soal 1, maka carilah:

   a) Irisan (interseksi) dari himpunan-himpunan A dan B = $A \cap B$

   b) Irisan (interseksi) dari himpunan-himpunan A dan C = $A \cap C$

   c) Irisan (interseksi) dari himpunan-himpunan A dan D = $A \cap D$

   d) Irisan (interseksi) dari himpunan-himpunan B dan C = $B \cap C$

   e) Irisan (interseksi) dari himpunan-himpunan B dan D = $B \cap D$

   f) Irisan (interseksi) dari himpunan-himpunan C dan D = $C \cap D$

3. Berdasarkan himpunan-himpunan yang terdapat pada soal 1, maka carilah:

   a) Gabungan dari himpunan-himpunan A, B, dan C = $A \cup B \cup C$

   b) Gabungan dari himpunan-himpunan A, B, dan D = $A \cup B \cup D$

   c) Gabungan dari himpunan-himpunan B, C, dan D = $B \cup C \cup D$

   d) Gabungan dari himpunan-himpunan A, C, dan D = $A \cup C \cup D$

e) Irisan dari himpunan-himpunan A, B, dan C = $A \cap B \cap C$

f) Irisan dari himpunan-himpunan A, B, dan D = $A \cap B \cap D$

g) Irisan dari himpunan-himpunan A, C, dan D = $A \cap C \cap D$

h) Irisan dari himpunan-himpunan B, C, dan D = $B \cap C \cap D$

4. Gambarkan sebuah diagram Venn untuk menunjukkan himpunan universal U dan himpunan-himpunan bagian A serta B jika:

   U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

   A = {2, 3, 5, 7}

   B = {1, 3, 4, 7, 8}

   Maka carilah:

   a) A – B
   b) B – A
   c) A ∩ B
   d) $A \cup B$
   e) $A \cap B^c$
   f) $B \cap A^c$

5. Misalkan diketahui himpunan-himpunan sebagai berikut:

   U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

   A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

   B = {3, 4, 6, 7, 15, 17}

   C = {5, 6, 8, 11, 12, 13}

   Gambarkan diagram venn-nya kemudian carilah:

   a) $A \cap B$
   b) $B \cap C$
   c) $A \cap C$
   d) $A \cup B$
   e) $A \cup B \cup C$
   f) $A \cap B \cap C$
   g) $(A \cup B) \cap C$
   h) $A^c \cap B^c \cap C$
   i) $A \cap B \cap C^c$

6. Misalkan diketahui himpunan himpunan sebagai berikut:

   \ U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

   X = {2, 4, 6, 8, 10}

   Y = (0, 3, 7, 9}

   Z = {2, 7, 9}

   Tanpa menggunakan diagram venn, carilah:

   a) $X^c$
   b) $Y^c$
   c) $Z^c$
   d) $X \cap Y$

e) $X \cup Y$
f) $X \cap Z$
g) $X \cup Z$
h) $Y \cap Z$
i) $Y \cup Z$
j) $X \cup (Y \cap Z)$
k) $X \cap (Y \cup Z)$
l) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
m) $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
n) $(X \cup Y)^c$
o) $(X \cap Y)^c$

7. Apabila U adalah suatu himpunan universal, tentukan mana yang benar dan yang salah di antara pernyataan-pernyataan di bawah ini:
   a) $A \cup A^c = U$
   b) $A \cap A^c = A$
   c) $B \cap U = B$
   d) $B \cup U = U$
   e) $C \cup \emptyset = C$
   f) $C \cap C = \emptyset$
   g) $D \cap \emptyset = \emptyset$
   h) $D \cap D = D$
   i) $(B^c)^c = U$
   j) $(A - C) \cup C = A - C$
   k) $B \cap (B - D) = B \cup D$
   l) $(A \cup D) - D = A - D$
8. Carilah hasil kali cartesius (*Cartesian product)* dari himpunan-himpunan berikut:

   $S_1$ = {a, b, c}; $S_2$ = {1, 2, 3}; $S_3$ = {d, e}

   a) $S_1$ x $S_2$
   b) $S_1$ x $S_3$
   c) $S_2$ x $S_3$
   d) $S_3$ x $S_1$
   e) $S_3$ x $S_2$
   f) $S_1$ x $S_2$ x $S_3$
9. Gambarkanlah grafik relasi R = {(x, y): x = 2y; (x, y) ϵ P}
10. Diketahui S = {1, 2, 3, 4, 5}, maka gambarkanlah grafik fungsi dari himpunan: {(x, y): y= 2x + 1, (x, y) ϵ R}

# BAB 2
# SISTEM BILANGAN

## A. Konsep Bilangan

Dalam matematika bilangan-bilangan yang ada dapat digolongkan menjadi bilangan nyata dan bilangan khayal. Kemudian dari bilangan nyata dapat dibagi lagi menjadi bilangan irrasional dan bilangan rasional. Selanjutnya bilangan rasional dibagi menjadi bilangan bulat dan bilangan pecahan.

Bilangan nyata dapat positif maupun negatif. Bilangan khayal adalah bilangan yang berupa akar pangkat genap dari suatu bilangan negatif. Perbedaan antara kedua jenis bilangan ini adalah bahwa bilangan nyata mengandung salah satu sifat secara tegas yaitu: atau positif atau negatif, dan tidak kedua-duanya. Sedangkan bilangan khayal tidak jelas sifatnya, apakah positif ataukah negatif. Bilangan khayal yang mengandung kedua sifat positif dan negatif sekaligus, disebut bilangan kompleks.

Contoh bilangan nyata : 2; -2; 1,1; -1,1

Contoh bilangan khayal : $\sqrt{(-16)} \stackrel{?}{=} \pm 4$; $\sqrt[4]{(-1{,}4641} \stackrel{?}{=} \pm 1{,}1$

Pada dasarnya setiap bilangan, positif maupun negatif, jika berpangkat genap akan selalu menghasilkan bilangan positif. Dengan demikian sukar sekali dibayangkan bagaimana hasil akhir dari suatu bilangan negatif yang berada di bawah tanda akar berpangkat genap. Oleh karenanya bilangan seperti itu dinamakan bilangan khayal.

Bilangan rasional adalah hasilbagi antara dua bilangan, yang berupa bilangan bulat; atau berupa pecahan dengan desimal terbatas, atau desimal berulang. Sedangkan bilangan irasional adalah hasil bagi antara dua bilangan berupa pecahan dengan desimal tak terbatas dan tak berulang, termasuk bilangan $\pi$ dan bilangan $e$. Bilangan bulat adalah hasilbagi antara dua bilangan yang hasilnya bulat, termasuk 0 (nol). Bilangan pecahan adalah hasilbagi antara dua bilangan yang hasilnya pecahan dengan desimal terbatas atau desimal berulang.

Berdasarkan pembatasan di atas, maka yang membedakan apakah sesuatu bilangan tergolong bilangan rasional ataukah bilangan irasional ialah faktor keterbatasan dan keberulangan desimalnya.

| | |
|---|---|
| 0,1372525 | tergolong bilangan rasional |
| 0,137252525799888...... | tergolong bilangan irrasional |
| 0,137252526 | tergolong bilangan rasional |

Dengan menggunakan pendekatan teori himpunan, pernyataan-pernyataan di bawah ini akan memperjelas penggolong-golongan bilangan tersebut (Dumairy, 2007: 14 – 15):

- Semua bilangan bulat adalah bilangan rasional, tapi tidak semua bilangan rasional berupa bilangan bulat.
- Semua bilangan pecahan adalah bilangan rasional, tapi tidak semua bilangan rasional berupa bilangan pecahan.
- Semua bilangan irrasional adalah bilangan berdesimal, tapi tidak semua bilangan berdesimal adalah bilangan irrasional.

Selain jenis-jenis bilangan di atas, terdapat tidak lagi jenis bilangan yang menyangkut bilangan bulat positif. Mereka adalah bilangan asli, bilangan cacah, dan bilangan prima.

Bilangan asli adalah semua bilangan bulat positif, tidak termasuk nol. Seandainya himpunan bilangan asli kita lambangkan dengan notasi *A*, maka:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Bilangan cacah ialah semua bilangan bulat positif atau nol. Jika himpunan bilangan cacah dilambangkan dengan notasi *C*, maka:

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Bilangan prima ialah bilangan asli yang besarnya tidak sama dengan satu dan hanya "habis" (maksudnya bulat) dibagi oleh dirinya sendiri. Jika himpunan bilangan prima dilambangkan dengan notasi *P*, maka:

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$

Selanjutnya akan dibahas bagaimana bilangan-bilangan nyata saling berhubungan satu sama lain secara relatif. Dalam hal ini kita akan bekerja dengan empat macam ketidaksamaan. Tanda-tanda ketidaksamaan yang dimaksud adalah:

Tanda $<$ melambangkan "lebih kecil dari"

Tanda $>$ melambangkan "lebih besar dari"

Tanda $\leq$ melambangkan "lebih kecil dari atau sama dengan"

Tanda $\geq$ melambangkan "lebih besar dari atau sama dengan"

Bilangan-bilangan nyata mempunyai sifat-sifat hubungan perbandingan sebagai berikut:

1. Jika $a \leq b$, maka $-a \geq -b$
   Sedangkan jika $a \geq b$, maka $-a \leq -b$
2. Jika $a \leq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \leq x.b$
   Sedangkan jika $a \geq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \geq x.b$
3. Jika $a \leq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \geq x.b$
   Sedangkan jika $a \geq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \leq x.b$
4. Jika $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a + c \leq b + d$
   Sedangkan jika $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka $a + c \geq b + d$

Contoh dari hubungan perbandingan bilangan-bilangan di atas ialah:

Untuk sifat ke-1:

Andaikan $a = 2$ dan $b = 4$ $a < b$, dan $-a > -b$, sebab -2 > -4. Sedangkan jika $a = 7$ dan $b = 5$ $a > b$, dan $-a < -b$, sebab -7 < -5

Untuk sifat ke-2:

Andaikan nilai $a = 2$ dan nilai $b = 4$ serta $x = 3$, maka $x.a < x.b$, sebab 2.3 = 6 < 4.3 = 12. Sedangkan jika $a = 7$; $b = 5$ dan $x = 3$, maka $x.a > x.b$, sebab 7.3 = 21 > 5.3 = 15

Untuk sifat ke-3:

Andaikan nilai $a = 2, dan\ nilai\ b = 4$, dan nilai $x = -3$, maka $x.a > x.b$, sebab 2.-3 = -6 > 4.-3 = -12. Sedangkan jika $a = 7$; $b = 5$ dan $x = -3$, maka $x.a < x.b$, sebab 7.-3 = -21 < 5.-3 = -15

Untuk sifat ke-4:

Jika nilai $a = 2; nilai\ b = 4$ dan $c = 3$; $d = 5$, maka $a + c < b + d$, sebab 2+3 = 5 < 4 + 5 = 9. Jika nilai $a = 4$; $b = 2$ dan $c = 5$ ; $d$=3, maka $a + c > b + d$, sebab 4 + 5 = 9 > 2 + 3 = 5

## B. Operasi Bilangan

Bilangan-bilangan nyata memenuhi kaidah-kaidah tertentu apabila mereka dioperasikan. Operasi penjumlahan dan perkalian bilangan akan memenuhi kaidah-kaidah berikut:

1. Kaidah komutatif

   Dalam menjumlahkan dua bilangan, perubahan urutan antara keduanya tidak akan mengubah hasil penjumlahan.

   $$\boxed{a + b = b + a}$$

   Contoh:

   - 4 + 7 = 7 + 4
   - 10 + 2 = 2 + 10
   - 5 + 3 = 3 + 5
   - 12 + 15 = 15 + 12
   - 2 + 3 = 3 + 2

   Hal yang sama berlaku juga untuk perkalian, perubahan urutan perkalian antara dua bilangan tidak akan mengubah hasilnya.

   $$\boxed{a \times b = b \times a}$$

   Contoh:

   - 4 x 7 = 7 x 4
   - 3 x 2 = 2 x 3
   - 5 x 3 = 3 x 5
   - 7 x 4 = 4 x 7
   - 6 x 5 = 5 x 6

2. Kaidah asosiatif

   Dalam menjumlahkan tiga bilangan –atau lebih- perubahan cara pengelompokkan bilangan-bilangan tersebut tidak akan mengubah hasil penjumlahan

   $$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

   Contoh:

   - (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)
   - (4 + 5) + 10 = 4 + (5 + 10)
   - (12 + 4 ) + 8 = 12 + (4 + 8)
   - (3 + 5) + 8 = 3 + (5 + 8)

Begitu pula dalam hal, perkalian, perubahan cara pengelompokkan bilangan-bilangan tidak akan mengubah hasil perkalian.

$$\boxed{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

Contoh:

- (2 x 3) x 4 = 2 x (3 x 4)
- (3 x 5) x 7 = 3 x (5 x 7)
- (4 x 6) x 10 = 4 x (6 x 10)
- (5 x 8) x 12 = 5 x (8 x 12)

3. Kaidah pembatalan

   Jika jumlah $a$ dan $c$ sama dengan jumlah $b$ dan $c$, maka $a$ sama dengan $b$.

   | |
   |---|
   | Jika $a + c = b + c$<br>Maka $a = b$ |

   *Contoh:* Jika *a* = 5, *b* = 5, dan *c* = 3. Maka 5 + 3 = 5 + 3, sehingga 5 = 5, atau dengan kata lain *a* = *b*

   Jika hasilkali $a$ dan $c$ sama dengan hasilkali $b$ dan $c$, dimana $c$ adalah bilangan nyata bukan nol, maka $a$ sama dengan $b$

   | |
   |---|
   | Jika $a.c = b.c \ \ (c \neq 0)$<br>Maka $a = b$ |

   *Contoh*: jika *a* = 7, *b* = 7, dan *c* = 2, maka 7 x 2 = 7 x 2, sehingga 7 = 7, atau dengan kata lain *a* = *b*.

4. Kaidah distributif

   Dalam pengalian bilangan $a$ terhadap jumlah $(b + c)$, hasilkalinya adalah sama dengan jumlah hasilkali $a.b$ dan hasilkali $a.c$. atau dengan kata lain hasilkali sebuah bilangan terhadap suatu penjumlahan adalah sama dengan jumlah hasilkali-nya.

   $$\boxed{a\,(b + c) = a.b + a.c}$$

   Contoh:

   - 3 ( 4 + 5) = (3 x 4) + (3 x 5)
   - 2 (5 + 10) = (2 x 5) + (2 x 10)
   - 5 (10 + 15) = (5 x 10) + (5 x 15)

5. Unsur penyama

   Unsur penyama dalam penjumlahan (atau pengurangan) adalah bilangan nol, sebab jumlah (selisih) antara suatu bilangan tertentu dan 0 adalah bilangan itu sendiri.

   $$\boxed{a \pm 0 = a}$$

   Contoh:

   - $4 \pm 0 = 4$
   - $15 \pm 0 = 15$

6. Kebalikan

   Setiap bilangan nyata mempunyai sebuah balikan penambah (*additive inverse*); jumlah antara bilangan tertentu dan balikan penambahnya adalah sama dengan nol.

   $$\boxed{a + (-a) = 0}$$

   Contoh:

   - 3 + (-3) = 0. Bilangan -3 disebut balikan penambah dari 3 atau negatif dari 3.
   - 10 + (-10) = 0, Bilangan -10 adalah balikan penambah dari 10 atau negatif dari 10.

   Setiap bilangan nyata bukan nol mempunyai sebuah balikan pengali (*multiplicative inverse*); hasilkali bilangan tertentu terhadap balikan pengalinya adalah sama dengan satu.

   $$\boxed{a \times \frac{1}{a} = 1}$$

   Contoh:

   - $3 \times \frac{1}{3} = 1$, Bilangan $\frac{1}{3}$ disebut balikan pengali dari 3
   - $7 \times \frac{1}{7} = 1$, Bilangan $\frac{1}{7}$ disebut balikan pengali dari 7
   - $10 \times \frac{1}{10} = 1$, Bilangan $\frac{1}{10}$ disebut balikan pengali dari 10

## C. Operasi Tanda

Apabila dalam membahas pengoperasian bilangan baru membahas mengenai bilangan-bilangan dengan satu macam tanda, yaitu positif. Maka selanjutnya akan dibahas pengoperasian terkait dengan tanda-tanda yang melekat padanya.

### 1. Operasi penjumlahan

a. Jumlah dari dua bilangan positif adalah sebuah bilangan positif baru yang nilainya lebih besar.

$$\boxed{(+a) + (+b) = (+c)}$$

*Contoh:*

- (+ 3) + (+ 4) = (+ 7)
- (+ 5) + (+ 12) = (+ 17)
- (+ 10) + (+ 15) = (+ 25)
- (+ 15) + (+ 25) = (+ 40)
- (+ 60) + (+ 40) = (+ 100)

b. Jumlah dari dua bilangan negatif adalah sebuah bilangan negatif baru yang nilainya lebih kecil.

$$\boxed{(-a) + (-b) = (-c)}$$

*Contoh:*

- (-3) + (- 4) = (- 7)
- (-5) + (-7) = (- 12)
- (-10) + (- 15) = (- 25)
- (-20) + (-25) = (- 45)
- (- 37) + (- 13) = (- 50)

c. Jumlah dari bilangan positif dan bilangan negatif adalah bilangan positif jika harga mutlak bilangan pertama lebih besar dari harga mutlak bilangan kedua, atau bilangan negatif jika harga mutlak bilangan pertama lebih kecil dari harga mutlak bilangan kedua.

$$\boxed{(+a) + (-b) = (+c) \text{ jika } |a| > |b|}$$

*Contoh:*

- (+ 5) + (-3) = (+2)
- (+10) + (- 4) = (+ 6)
- (+ 20) + (- 11) = (+ 9)

atau

$$\boxed{(+\,a) + (-\,b) = (-d) \;\; \text{jika} \;\; |a| < |b|}$$

*contoh:*

- (+3) + (- 7) = (- 4)
- (+ 5) + (- 15) = (- 10)
- (+ 7) + (- 12) = (- 5)
- (+20) + (- 28) = (- 8)
- (+ 35) + (-50) = (- 15)

d. Jumlah dari bilangan negatif dan bilangan positif adalah bilangan positif apabila harga mutlak dari bilangan pertama lebih kecil dari harga mutlak bilangan kedua atau bilangan negatif apabila harga mutlak bilangan pertama lebih besar dari harga mutlak bilangan kedua.

$$\boxed{(-\,a) + (+\,b) = (+c) \;\; \text{jika} \;\; |a| < |b|}$$

*Contoh*:

- (- 3) + (+7) = (+4)
- (- 2) + ( + 10) = (+ 8)
- (- 5) + ( + 20) = (+ 15)
- (-20) + (+ 45) = (+ 25)
- (- 25) + (+75) = (+ 50)

atau

$$\boxed{(-\,a) + (+\,b) = (-d) \;\; \text{jika} \;\; |a| > |b|}$$

*Contoh:*

- (-8) + (+3) = (-5)
- (- 12) + (+ 5) = (- 7)
- (- 20) + (+ 7) = (- 13)
- (-30) + (+ 10) = (- 20)
- (-50) + (+15) = (-35)

**2. Operasi pengurangan**

a. Selisih antara dua bilangan positif adalah bilangan positif, jika harga mutlak bilangan pertama lebih besar daripada harga mutlak dari bilangan kedua, dan negatif jika harga mutlak bilangan pertama lebih kecil dari harga mutlak bilangan kedua.

$$(+a) - (+b) = (+c) \text{ jika } |a| > |b|$$

Contoh:

- (+8) – (+2) = (+6)
- (+ 15) – (+5) = (+10)
- (+30) – (+21) = (+9)
- (+50) – (+43) = (+7)
- (+100) – (+78) = (+22)

atau

$$(+a) - (+b) = (-d) \text{ jika } |a| < |b|$$

contoh:

- (+4) – (+9) = (-5)
- (+ 10) – (+ 17) = (-7)
- (+15) – (+ 28) = (- 13)
- (+20) – (+45) = (-25)

b. Selisih antara dua bilangan negatif adalah bilangan positif jika harga mutlak bilangan pertama lebih kecil dari harga mutlak bilangan kedua, atau akan menjadi bilangan negatif apabila harga mutlak bilangan pertama lebih besar daripada harga mutlak bilangan kedua.

$$(-a) - (-b) = (+c) \text{ jika } |a| < |b|$$

*Contoh:*

- (-2) – (-7) = (+5)
- (-10) – (-23) = (+ 13)
- (- 21) – (-30) = (+9)
- (-30) – (-50) = (+20)

atau

$$(-a) - (-b) = (-d) \text{ jika } |a| > |b|$$

*Contoh:*

- (-6) – (-2) = (-4)
- (-15) – (-7) = (-8)
- (-30) – (-21) = (-9)
- (-50) – (-30) = (-20)

c. Selisih antara bilangan positif dan bilangan negatif adalah sebuah bilangan positif baru.

$$\boxed{(+\,a) - (-\,b) = (+c)}$$

*Contoh:*

- (+3) – (-6) = (+9)
- (+5) – (- 10) = (+15)
- (+10) – (-21) = (+31)
- (+20) – (- 30) = (+ 50)

d. Selisih antara bilangan negatif dan bilangan positif adalah sebuah bilangan negatif baru.

$$\boxed{(-\,a) - (+\,b) = (-c)}$$

*Contoh:*

- (-4) – (+2) = (- 6)
- (-10) – (+8) = (- 18)
- (-20) – (+5) = (- 25)
- (-30) – (+10) = (- 40)

3. **Operasi perkalian**

a. Hasilkali antara dua bilangan positif, serta antara dua bilangan negatif adalah sebuah bilangan positif.

$$\boxed{(+\,a) \times (+\,b) = (+c)}$$

Contoh:

- (+2) x (+3) = (+6)
- (+4) x (+5) = (+20)
- (+10) x (+4) = (+40)
- (+15) x (+3) = (+45)

$$\boxed{(-\,a) \times (-\,b) = (+c)}$$

*Contoh:*

- (-4) x (-2) = (+8)
- (-5) x (-3) = (+15)
- (-10) x (-4) = (+40)
- (-20) x (-3) = (+ 60)

b. Hasilkali antara dua bilangan yang berlainan tanda adalah sebuah bilangan negatif.

$\boxed{(+\,a) \times (-\,b) = (-c)}$

Contoh:

- (+3) x (-2) = (-6)
- (+4) x (-3) = (-12)
- (+10) x (- 5) = (-50)
- (+ 12) x (-3) = (-36)

$\boxed{(-\,a) \times (+\,b) = (-c)}$

*Contoh:*

- (-4) x (+2) = (-8)
- (-6) x (+4) = (- 24)
- (-10) x (+3) = (-30)
- (-12) x (+ 2) = (-24)

**4. Operasi pembagian**

a. Hasilbagi antara dua bilangan positif, serta antara dua bilangan negatif adalah sebuah bilangan positif.

$\boxed{(+\,a) : (+\,b) = (+c)}$

*Contoh:*

- (+8) : (+2) = (+4)
- (+10) : (+2) = (+5)
- (+35) : (+5) = (+7)
- (+50) : (+10) = (+5)
- (+100) : (+5) = (+20)

$\boxed{(-\,a) : (-\,b) = (+c)}$

*Contoh:*

- (-4) : (-2) = (+2)
- (-20) : (-5) = (+4)
- (-30) : (-3) = (+10)
- (-100) : (-10) = (+10)

b. Hasilbagi antara dua bilangan yang berlainan tanda adalah sebuah bilangan negatif.

$$\boxed{(+\,a):(-\,b) = (-c)}$$

Contoh:

- (+6) : (-2) = (-3);
- (+12) : (-3) = (-4)
- (+24) : (-4) = (-6)
- (+36) : (-3) = (-12)
- (+50) : (-5) = (-10)

$$\boxed{(-\,a):(+\,b) = (-c)}$$

*Contoh:*

- (-8) : (+2) = (-4)
- (-10) : (+4) = (-2,5)
- (-20) : (+5) = (-4)
- (-30) : (+10) = (-3)
- (-49) : (+7) = (-7)

## D. Operasi Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan ialah bilangan rasional yang benar, tidak bulat atau tidak utuh. Berdasarkan cara penulisannya, bilangan pecahan bisa dibedakan atas pecahan biasa dan pecahan desimal. Pecahan biasa selalu menunjukkan bentuk pembagian antara dua bilangan, contoh $\frac{1}{4}, \frac{3}{6}$, dll. Setiap pecahan biasa pada dasarnya dapat diubah bentuk menjadi pecahan desimal, yakni dengan cara mengisikan atau mencantumkan angka-angka tertentu yang memenuhi di belakang tanda koma. Jadi pecahan ¼ bisa dituliskan menjadi 0,25, sedangkan pecahan $\frac{3}{6}$ bisa dituliskan menjadi 0,5.

Dalam suatu pecahan biasa terdapat dua macam suku, yaitu suku terbagi (*numerator*) dan suku pembagi (*denominator*). Suku terbagi terletak di atas garis bagi, sedangkan suku pembagi terletak di bawahnya. Dalam contoh di atas, angka 1 dan 3 masing-masing adalah suku terbagi, sedangkan angka 4 dan 6 masing-masing adalah suku pembagi.

Berdasarkan nilai-nilai dari suku-suku pecahan biasa dibedakan menjadi tiga macam yaitu *pecahan layak*, *pecahan tak layak*, dan *pecahan kompleks*. Pecahan layak ialah pecahan yang mutlak suku terbaginya lebih kecil dari harga mutlak suku pembaginya. Apabila pecahan layak ini didesimalkan, angka di depan tanda koma akan selalu berupa angka nol. Sedangkan pecahan tak layak ialah pecahan yang harga mutlak suku terbaginya sama dengan atau lebih besar dari harga mutlak suku pembaginya. Jika didesimalkan, angka di depan tanda koma angka berupa angka bukan nol. Adapun pecahan kompleks ialah pecahan yang pada salah satu atau kedua-duanya terdapat satu pecahan atau lebih. Jadi jika pada suku terbagi (atau pada suku pembagi, atau bahkan pada kedua suku tersebut) masih terdapat lagi satu atau beberapa pecahan, maka pecahan demikian dinamakan dengan pecahan kompleks. (Dumairy, 2007: 22)

Contoh pecahan layak: ½ , ¼ , ¾

Contoh pecahan tak layak: $^5/_2$, $^7/_4$

Contoh pecahan kompleks: $\frac{\frac{1}{3}}{5}$, $\frac{^2/_4}{^1/_3}$

Selanjutnya akan dibahas mengenai prinsip-prinsip pengoperasiannya, dalam hal ini pengoperasian pecahan biasa.

1. **Operasi pemadanan**

Suku-suku dalam suatu pecahan dapat diperbesar atau diperkecil dengan mengubah nilai pecahannya, sepanjang keduanya (suku terbagi dan suku pembagi) dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}}$$

Contoh memperbesar pecahan:

$\frac{2}{3} = \frac{2\times3}{3\times3} = \frac{6}{9}$; $\frac{6}{9} = \frac{6\times5}{9\times5} = \frac{30}{45}$; $\frac{30}{45} = \frac{30\times c}{45\times c}$; dst

Pecahan-pecahan $\frac{2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{30}{45}, \frac{30c}{45c}$ adalah sepadan

Contoh memperkecil pecahan:

$\frac{24}{30} = \frac{24:2}{30:2} = \frac{12}{15}$; $\frac{12:3}{15:3} = \frac{4}{5}$

Pecahan-pecahan $\frac{24}{30}, \frac{12}{15}, \frac{4}{5}$ adalah sepadan.

Berdasarkan kedua contoh di atas, dapat disimpulkan: pembesaran pecahan bersifat tak terbatas, sedangkan pengecilan pecahan bersifat terbatas. Kita dapat memperbesar pecahan sekehendak kita, tetapi kita hanya dapat memperkecil sebuah pecahan sampai pada bentuk tersederhana, atau sampai pada suku-suku terkecil, yakni jika kedua suku tidak memiliki pembagi bersama lagi.

**2. Operasi penjumlahan dan pengurangan**

Dua buah pecahan atau lebih hanya dapat ditambahkan dan dikurangi apabila mereka memiliki suku-suku pembagi yang sama atau sejenis. Berarti jika suku-suku pembaginya belum sama, terlebih dahulu harus disamakan sebelum pecahan-pecahan tersebut ditambahkan atau dikurangkan. Dalam menyamakan suku-suku pembaginya, diusahakan pecahan-pecahan tersebut memiliki suku pembagi bersama terkecil (spbt). (Dumairy, 2007: 24)

Contoh:

- $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4}$
- $\frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$
- $\frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$
- $\frac{12}{5} - \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Dalam hal pecahan-pecahan yang hendak dijumlahkan atau dikurangi tidak memiliki suku pembagi bersama terkecil, maka yang dilakukan adalah mengalikan suku pembaginya. Namun penjumlahan (atau pengurangan) bilangan-bilangan campuran dapat dilakukan dengan cara menambahkan (atau mengurangkan) bilangan-bilangan bulatnya dulu, kemudian menambahkan (mengurangkan) pecahan dengan pecahannya. Jadi tidak harus dengan mengubah bilangan-bilangan campuran tersebut menjadi pecahan tak layak terlebih dahulu.

Contoh:

- $\frac{5}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5b}{ab} + \frac{2a}{ab} = \frac{5b+2a}{ab}$
- $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3\times3}{4\times3} + \frac{2\times4}{4\times3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$
- $2\frac{5}{8} + 3\frac{2}{8} = (2+3) + \left(\frac{5}{8} + \frac{2}{8}\right) = 5 + \frac{7}{8} = 5\frac{7}{8}$

  Atau

  $2\frac{5}{8} + 3\frac{2}{8} = \frac{21}{8} + \frac{26}{8} = \frac{47}{8} = 5\frac{7}{8}$

### 3. Operasi perkalian

Perkalian antarpecahan dilakukan dengan cara mengalikan suku-suku sejenis, suku terbagi dikalikan suku terbagi dan suku pembagi dikalikan suku pembagi. Perkalian yang mengandung bilangan campuran dilakukan dengan cara mengubahnya terlebih dahulu menjadi pecahan tak layak sebelum dikalikan.

Contoh:

- $\frac{a}{x} \times \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}$
- $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$
- $5\frac{3}{4} \times 6\frac{1}{2} = \frac{23}{4} \times \frac{13}{2} = \frac{299}{8} = 37\frac{3}{8}$

### 4. Operasi pembagian

Pembagian antar pecahan dapat dilakukan dengan tiga macam cara, yaitu: Cara pertama. Kalikan pecahan terbagi (pecahan yang akan dibagi) dengan kebalikan dari pecahan pembagi.

Contoh: $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{28}{24} = 1\frac{1}{6}$ atau $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{\cancel{8}_2} \times \frac{\cancel{4}^1}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

Cara kedua. Ubah terlebih dahulu pecahan terbagi dan pecahan pembagi sehingga keduanya memiliki suku pembagi bersama terkecil, kemudian batalkan suku pembagi bersama terkecil tersebut dan bagilah suku-suku terbagi yang tersisa.

Contoh: $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} : \frac{6}{8} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

Cara ketiga. Kalikan terlebih dahulu dengan suku pembagi bersama terkecil, selesaikan atau sederhanakan masing-masing pecahan dan kemudian dibagi.

Contoh: $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \left(\frac{7}{\cancel{8}} \times \cancel{8}\right) : \left(\frac{3}{\cancel{4}} \times \cancel{8}^2\right) = 7 : 6 = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

## E. Pangkat

Pangkat dari suatu bilangan ialah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun (Dumairy, 2007: 29). Notasi $x^n$ menunjukkan bahwa $x$ harus dikalikan dengan $x$ itu sendiri secara berturut-turut sebanyak $n$ kali. Notasi pemangkatan sangat berfaedah untuk merumuskan penulisan bentuk perkalian secara ringkas.

Misalkan: 5 x 5 x 5 x 5 = $5^4$; atau;

0,4 x 0,4 x 0,4 x 0,4 x 0,4 = $0{,}4^5$

Notasi pemangkatan berfaedah pula untuk meringkas bilangan-bilangan kelipatan perkalian-sepuluh yang nilainya sangat besar atau sangat kecil. Misalkan bilangan 1.000.000 dapat diringkat menjadi $10^6$; bilangan 1/100.000 atau 0,00001 dapat diringkat menjadi $10^{-5}$.

Pemangkatan suatu bilangan dan pengoperasian bilangan-bilangan berpangkat mematuhi kaidah-kaidah tertentu. Berikut akan dijelaskan beberapa kaidah-kaidah dan pemangkatan bilangan.

1. **Kaidah pemangkatan bilangan**
   a. Bilangan bukan nol berpangkat nol adalah satu.

      $x^0 = 1 \ (x \neq 0)$

      Contoh: $4^0 = 1$

   b. Bilangan berpangkat satu adalah bilangan itu sendiri.

      $x^1 = x$

      Contoh: $5^1 = 5$

   c. Nol berpangkat suatu bilangan adalah tetap nol.

      $0^x = 0$

      Contoh: $0^7 = 0$

   d. Bilangan berpangkat negatif adalah balikan pengali dari bilangan itu sendiri.

      $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

      Contoh: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 8^{-1}$

   e. Bilangan berpangkat pecahan adalah akar dari bilangan itu sendiri dengan suku pembagi dalam pecahan menjadi pangkat dari akarnya, sedangkan suku terbagi menjadi pangkat dari bilangan yang bersangkutan.

      $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

      Contoh: $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9} = 1{,}55$

   f. Bilangan pecahan berpangkat adalah hasilbagi suku-suku berpangkatnya.

      $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

Contoh: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

g. Bilangan berpangkat dipangkatkan lagi adalah bilangan berpangkat hasilkali pangkat-pangkatnya.

$(x^a)^b = x^{ab}$

Contoh: $(3^2)^4 = 3^{2.4} = 3^8 = 6561$

h. Bilangan dipangkatkan pangkat-berpangkat adalah bilangan berpangkat hasil pemangkatan pangkatnya.

$x^{a^b} = x^c$ dimana $c = a^b$

Contoh: $3^{2^4} = 3^{16} = 43.046.721$

Kaidah ke-7 dan ke-8 di atas perlu mendapat perhatian khusus, sebab acapkali diselesaikan secara tidak benar. Jika dikerjakan dengan kurang teliti, maka contoh-contoh dalam kaidah ke-7 dan ke-8 tersebut bisa salah diselesaikan menjadi $9^4$ (=1296), padahal seharusnya adalah $3^8$ dan $3^{16}$. Prinsip penyelesaian bilangan yang pangkatnya beranting ialah menyelesaikan pangkat-pangkatnya terlebih dahulu.

**2. Kaidah perkalian bilangan berpangkat**

a. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat jumlah pangkat-pangkatnya.

$x^a . x^b = x^{a+b}$

Contoh: $4^2 . 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$

b. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah perkalian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan

$x^a . y^a = (xy)^a$

Contoh: $4^2 . 6^2 = (4.6)^2 = 24^2 = 576$

**3. Kaidah pembagian bilangan berpangkat**

a. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat selisih pangkat-pangkatnya.

$x^a : x^b = x^{a-b}$

Contoh: $4^3 : 4^2 = 4^{3-2} = 4^1 = 4$

b. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah pembagian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

Contoh: $5^2 : 4^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

## F. Akar

Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat. Akar dari suatu bilangan ialah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya (Dumairy, 2007: 32). Berdasarkan konsep pemangkatan dapat diketahui, bahwa jika bilangan-bilangan yang sama (misalkan x) dikalikan sejumlah tertentu sebanyak (katakanlah) *n* kali, maka kita dapat menuliskannnya menjadi $x^n$; *x* disebut sebagai *basis* dan *n* disebut pangkat. Misalkan $x^n = y$, maka *x* dapat juga disebut sebagai akar pangkat *n* dari *y*, yang jika dituliskan dalam bentuk akar menjadi $x = \sqrt[n]{y}$.

Misalkan: $\sqrt[2]{9} = 3$ sebab $3^2 = 9$; $\sqrt[3]{64} = 4$ sebab $4^3 = 64$

Sebagaimana halnya dengan bilangan-bilangan yang lain, pengakaran bilangan pun harus mematuhi sejumlah kaidah-kaidah berikut:

### 1. Kaidah pengakaran bilangan

a. Akar dari sebuah bilangan adalah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya

Berdasarkan $\sqrt[n]{y} = x$ jika $x^n = m$ (*x* adalah basis)

Maka: $\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}$

Contoh: $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

b. Akar dari suatu bilangan berpangkat adalah bilangan itu sendiri berpangkat pecahan, dengan pangkat dari bilangan bersangkutan menjadi suku terbagi sedangkan pangkat dari akar menjadi suku pembagi.

$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

Contoh: $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}} = 1{,}55$

c. Akar dari suatu perkalian bilangan adalah perkalian dari akar-akarnya.

$\sqrt[b]{xy} = \sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y}$

Contoh: $\sqrt[3]{8 \times 64} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{64} = 2 \times 4 = 8$

d. Akar dari suatu bilangan pecahan adalah pembagian dari akar suku-sukunya

$\sqrt[b]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}$

Contoh: $\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

**2. Kaidah penjumlahan (pengurangan) bilangan terakar**

Bilangan-bilangan terakar hanya dapat ditambahkan atau dikurangi apabila akar-akarnya sejenis. Yang dimaksud dengan akar-akar yang sejenis ialah akar-akar yang pangkat dan radikannya sama.

Jumlah (selisih) bilangan-bilangan terakar adalah jumlah (selisih) koefisien-koefisiennya terakar.

$m\sqrt[b]{x^a} \pm n\sqrt[b]{x^a} = (m \pm n)\sqrt[b]{x^a}$

Contoh: $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3} = 7(1{,}73) = 12{,}11$

**3. Kaidah perkalian bilangan terakar**

a. Hasilkali bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasilkali bilangan-bilangannya. Perkalian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$\sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{x.y}$

Contoh: $\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{512} = 8$

b. Akar ganda dari suatu bilangan adalah akar pangkat baru dari bilangan bersangkutan; pangkat baru akarnya ialah hasilkali pangkat dari akar-akar sebelumnya.

$\sqrt[b]{\sqrt[c]{x^n}} = \sqrt[b.c]{x^n}$

Contoh:

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{15.625}} = \sqrt[2.3]{15.625} = 5$

**4. Kaidah pembagian bilangan terakar**

Hasilbagi bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasilbagi bilangan-bilangannya. Pembagiannya hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}}$$

Contoh:

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 0{,}5$$

## G. Logaritma

Logaritma pada hakikatnya merupakan kebalikan dari proses pemangkatan dan/atau pengakaran. Logaritma dapat dipakai untuk menyederhanakan operasi-operasi perkalian, pembagian, pencarian pangkat dan penarikan akar. Logaritma dari suatu bilangan ialah pangkat yang harus dikenakan pada (memenuhi) bilangan pokok logaritma untuk memperoleh bilangan tersebut. (Dumairy, 2007: 36). Misalkan suatu bilangan berpangkat ($x^n$) sama dengan bilangan tertentu ($m$), maka dalam bentuk pemangkatan kita dapat menuliskan menjadi:

$$x^n = m$$

Dimana $x$ adalah basis; dan; $n$ adalah pangkat.

Pangkat $n$ disebut juga logaritma dari $m$ terhadap basis $x$, yang dituliskan dalam bentuk logaritma menjadi:

$n = {}^{x}\log m$ atau $n = \log_x m$

bilangan pokok (basis) logaritma, $x$ dalam contoh tersebut, dapat dituliskan di pojok kiri atas dari tanda log (singkatan logaritma) atau dipokok kanan bawah dari tanda tersebut. Berdasarkan kesamaan bentuk pemangkatan logaritma sebagaimana ditunjukkan di atas, dapat pula menarik analogi pada pernyataan-pernyataan di bawah ini:

$5^2 = 25$; pangkat 2 adalah logaritma dari 25 terhadap basis 5, atau ${}^{5}\log 25 = 2$

$4^3 = 64$; pangkat 3 adalah logaritma dari 64 terhadap basis 4, atau ${}^{4}\log 64 = 3$

Selain dengan bentuk pemangkatan, bentuk logaritma juga berhubungan dengan bentuk pengakaran. Keeratan hubungan diantara ketiga macam bentuk ini dapat dilihat sebagai berikut:

| Bentuk pangkat | Bentuk akar | Bentuk logaritma |
| --- | --- | --- |
| $x^n = m$ | $\sqrt[n]{m} = x$ | ${}^{x}\log m = n$ |

Logaritma dapat dihitung untuk basis berapapun, akan tetapi pada umumnya basis logaritma selalu berupa bilangan positif dan tidak sama dengan satu. Basis logaritma yang paling lazim digunakan, karena pertimbangan praktis dalam penghitungan adalah bilangan 10. Karena kelaziman tersebut, maka basis 10 ini pada umumhya tidak dicantumkan dalam notasi logaritma. Dengan demikian log *m* berarti adalah ${}^{10}\log m$.

Logaritma berbasis 10 disebut juga logaritma biasa (*common logarithm* atau logaritma Briggs –berdasarkan nama penemunya Henry Briggs). Di samping bilangan 10, basis lain yang juga lazim dipakai adalah bilangan *e* (*e* = 2,718287 atau sering diringkas menjadi 2,72). Logaritma berbasis *e* disebut juga dengan logaritma natural atau logaritma Napier (nama penemunya adalah John Napier). Jika notasi logaritma Briggs dilambangkan dengan log, maka logaritma natural dilambangkan dengan *ln*. Dengan demikian *ln m* berarti *log m*, $\ln 24 \equiv {}^{e}\log 24$.

berikut akan dijelaskan kaidah-kaidah dalam logaritma

a. ${}^{x}\log x = 1$ sebab $x^1 = x$

contoh:

- ${}^{10}\log 10 = 1$;
- ${}^{7}\log 7 = 1$

b. ${}^{x}\log 1 = 0$ sebab $x^0 = 1$

contoh:

- ${}^{6}\log 1 = 0$;
- ${}^{5}\log 1 = 0$

c. ${}^{x}\log x^n = n$ sebab $x^n = x^n$

contoh:

- ${}^{7}\log 7^3 = 3$
- ${}^{5}\log 5^2 = 2$

d. ${}^{x}\log m^n = n\, {}^{x}\log m$

contoh:

- ${}^{10}\log 100^2 = 2\ {}^{10}\log 100 = 2\ {}^{10}\log 10^2 = 2.2 = 4$
- ${}^{8}\log 512^4 = 4\ {}^{8}\log 512 = 4\ {}^{8}\log 8^3 = 4.3 = 12$

e. $x\ {}^{x}log\ m = m$

contoh:

- $10\ {}^{10}\log 100 = 10\ {}^{10}\log 10^2 = 10^2 = 100$
- $8\ {}^{8}\log 512 = 8\ {}^{8}\log 8^3 = 8^3 = 512$

f. ${}^{x}log\ m.n = {}^{x}log\ m + {}^{x}log\ n$

contoh:

- ${}^{10}\log (100).(1000) = {}^{10}\log 100 + {}^{10}\log 1000 = 2 + 3 = 5$
- ${}^{3}\log (243).(27) = {}^{3}\log 243 + {}^{3}\log 27 = 5 + 3 = 8$

g. ${}^{x}log \frac{m}{n} = {}^{x}log\ m - {}^{x}log\ n$

contoh:

- ${}^{10}\log \frac{100}{1000} = {}^{10}\log 100 - {}^{10}\log 1000 = 2 - 3 = -1$
- ${}^{3}\log \frac{243}{27} = {}^{3}\log 243 - {}^{3}\log 27 = 5 - 3 = 2$

h. ${}^{x}log\ m.\ {}^{m}log\ x = 1$ sehingga ${}^{x}log\ m = \frac{1}{{}^{m}\log x}$

contoh:

- ${}^{10}\log 100.{}^{100}\log 10 = {}^{10}\log 10^2.\ {}^{100}\log 100^{0,5} = 2 \times 0,5 = 1$
- ${}^{3}\log 81.\ {}^{81}\log 3 = {}^{3}\log 3^4.\ {}^{81}\log 81^{0,25} = 4 \times 0,25 = 1$

i. ${}^{x}log\ m.\ {}^{m}log\ n.\ {}^{n}log\ x = 1$

contoh:

- ${}^{10}\log 100.{}^{100}\log 10000.{}^{10000}\log 10 =$
  ${}^{10}\log 10^2.\ {}^{100}\log 100^2.\ {}^{10000}\log 10000^{0,25} = 2 \times 2 \times 0,25 = 1$
- ${}^{3}\log 9.{}^{9}\log 729.\ {}^{729}\log 3 =$
  ${}^{3}\log 3^2.\ {}^{9}\log 9^3.\ {}^{729}\log 729^{1/6} = 2 \times 3 \times 1/6 = 1$

**Latihan Soal:**

1. Benarkah bahwa jika a > x > b, maka selalu x.a > x.b?
2. Manakah yang salah diantara pernyataan-pernyataan berikut ini?
   a. Bilangan positif berpangkat genap akan menghasilkan bilangan positif
   b. Bilangan negatif berpangkat genap menghasilkan bilangan positif
   c. Bilangan positif berpangkat ganjil menghasilkan bilangan negatif
   d. Bilangan negatif berpangkat ganjil menghasilkan bilangan negatif
3. Jumlahkan dari pasanga-pasangan pecahan berikut
   a) $\frac{3}{8}+\frac{4}{6}$
   b) $\frac{4}{6}+\frac{3}{12}$
   c) $\frac{4}{7}+\frac{7}{4}$
   d) $\frac{5}{6}+4\frac{1}{3}$
4. Hitunglah selisih dari soal-soal nomor 3 di atas.
5. Hitunglah hasilkali dari soal-soal nomor 3 di atas
6. Hitunglah hasilbagi dari soal-soal nomor 3 di atas
7. Selesaikanlah soal berikut ini:
   (a) $7^4 . 7^3 . 7^{-2}$
   (b) $6^3 . 4^3 . (-5)^3$
   (c) $7^4 : 7^3 . 7^{-2}$
   (d) $6^3 : 4^3 : (-5)^3$
8. Ubahlah ke dalam bentuk logaritma
   (a) $6^4$
   (b) $\sqrt[3]{64}$
   (c) $5^4 . 5^2 : 5^{-2}$
   (d) $3^{9/2} : \sqrt{243}$
9. Carilah $x$ jika:
   (a) $\log x = 0{,}3010$
   (b) $\log x = 1{,}2304$
   (c) $\log x^2 = 1{,}7482$
   (d) $\log x^2 = 2{,}6021$
10. Hitunglah:
    (a) ${}^6\log 36$
    (b) ${}^8\log 512$
    (c) $\ln e$
    (d) $\ln 17$

# BAB 3
# DERET

Deret ialah rangkaian bilangan yang tersusun secara sistematis dan memenuhi kaidah-kaidah tertentu. Bilangan-bilangan yang merupakan unsur dan pembentuk sebuah deret dinamakan suku. Keteraturan rangkaian bilangan yng membentuk sebuah deret terlihat pada "pola perubahan" bilangan-bilangan tersebut dari satu suku ke suku berikutnya.

Dilihat dari jumlah suku yang membentuknya deret digolongkan atas deret berhingga dan deret tak berhingga. Yang dimaksud deret berhingga adalah deret yang jumlah suku-sukunya tertentu, sedangkan deret tak berhingga adalah deret yang jumlah suku-sukunya tidak terbatas. Sedangkan dilihat dari segi pola perubahan bilangan pada suku-sukunya, deret bisa dibeda-bedakan menjadi deret hitung, deret ukur dan deret harmoni.

## A. Deret Hitung

Deret hitung ialah deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan penjumlahan terhadap sebuah bilangan tertentu. Bilangan yang membedakan suku-suku dari deret hitung ini dinamakan pembeda, yang merupakan selisih antara nilai-nilai dua suku yang berurutan.

Contoh:

- 4, 9, 14, 19, 24, 29 (pembeda = 5)
- 92, 82, 72, 62, 52 (pembeda = -10)
- 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 (pembeda = 2)

Besarnya nilai suku tertentu (ke-*n*) dari sebuah deret hitung dapat dihitung melalui suatu rumus. Dalam membentuk rumus yang dimaksud, kita pergunakan contoh di atas. Dalam contoh tersebut, nilai suku pertamanya (a) adalah 4 dan pembedanya (b) adalah 5.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | 29 |
| $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ |

$S_1 = 4 = a$

$S_2 = 9 = a + b = a + (2 - 1)b$

$S_3 = 14 = a + 2b = a + (3 - 1)b$

$S_4 = 19 = a + 3b = a + (4 - 1)b$

$S_5 = 24 = a + 4b = a + (5 - 1)b$

$S_6 = 29 = a + 5b = a + (6 - 1)b$

……

……

……

$\mathbf{S_n = a + (n - 1)b}$

a : suku pertama

b : pembeda

n : indeks suku

berdasarkan rumus di atas, dengan mudah dan cepat dapat dihitung dengan mudah apabila mau menghitung nilai-nilai suku tertentu. Sebagai contoh, nilai suku ke-15, suku ke-27, suku ke – 32 dan suku ke- 42 dari contoh deret hitung ialah:

$S_{15} = a + (n - 1)b = 4 + (15 - 1)5 = 4 + 70 = 74$

$S_{27} = a + (n - 1)b = 4 + (27 - 1)5 = 4 + 130 = 134$

$S_{32} = a + (n - 1)b = 4 + (32 - 1)5 = 4 + 155 = 159$

$S_{42} = a + (n - 1)b = 4 + (42 - 1)5 = 4 + 205 = 209$

Hal yang sama dapat dilakukan pula pada contoh yang kedua dan ketiga, misalkan pada contoh yang kedua ingin dihitung berapa nilai suku ke-10, suku ke-15, dan suku ke-20, maka nilainya ialah:

$S_{10} = a + (n - 1)b = 92 + (10 - 1)\text{-}10 = 92 - 90 = 2$

$S_{15} = a + (n - 1)b = 92 + (15 - 1)\text{-}10 = 92 - 140 = -48$

$S_{20} = a + (n - 1)b = 92 + (20 - 1)\text{-}10 = 92 - 190 = -98$

Kemudian untuk contoh ketiga, misalkan ingin diketahui suku ke-24, suku ke- 45, suku ke-70 dan suku ke-90

$S_{24} = a + (n - 1)b = 3 + (24 - 1)2 = 3 + 46 = 49$

$S_{45} = a + (n - 1)b = 3 + (45 - 1)2 = 3 + 88 = 91$

$S_{70} = a + (n - 1)b = 3 + (70 - 1)2 = 3 + 138 = 141$

$S_{90} = a + (n - 1)b = 3 + (90 - 1)2 = 3 + 178 = 181$

Jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu tak lain adalah jumlah nilai suku-sukunya, sejak suku yang pertama ($S_1$ atau a) sampai dengan suku ke-n ($S_n$) yang bersangkutan.

$$\boldsymbol{J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

$$J_4 = \sum_{i=1}^{4} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$J_5 = \sum_{i=1}^{5} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$J_6 = \sum_{i=1}^{6} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

Berdasarkan rumus $S_n = a + (n – 1)b$, maka masing-masing $S_i$ dapat diuraikan, sehingga akan menjadi sebagai berikut:

$J_4 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) = 4a + 6b$

$J_5 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) = 5a + 10b$

$J_4 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) + (a + 5b) = 6a + 15b$

Masing-masing $J_i$ dapat disederhanakan atau ditulis ulang menjadi sebagai berikut:

$J_4 = 4a + 6b = 4a + \frac{4}{2}(4 – 1)b$

$J_5 = 5a + 10b = 5a + \frac{5}{2}(5 – 1)b$

$J_6 = 6a + 15b = 6a + \frac{6}{2}(6 – 1)b$

…..

…..

…..

$\mathbf{J_n = na + \frac{n}{2}(n - 1)b}$

Atau,

$\mathbf{J_n = \frac{n}{2}[2a + (n – 1)b]}$

Rumus $J_n = \frac{n}{2}[2a + (n – 1)b]$ dapat disederhanakan kembali menjadi:

$J_n = \frac{n}{2}[2a + (n – 1)b]$

$= \frac{n}{2}[a + a + (n – 1)b]$; misal: $S_n = a + (n-1)b$

$\mathbf{J_n = \frac{n}{2}(a + S_n)}$

Dengan demikian untuk menghitung jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu n, terdapat empat bentuk rumus yang dapat digunakan, yaitu:

$$\boldsymbol{J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

$$\mathbf{J_n = na + \frac{n}{2}(n-1)b}$$

$$\mathbf{J_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b]}$$

$$\mathbf{J_n = \frac{n}{2}(a + S_n)}$$

Dalam kasus deret hitung pada contoh pertama, jumlahnya sampai dengan suku ke-15 adalah

$$J_{15} = \frac{15}{2}(4 + S_{15})$$

$$= 7{,}5\ (4 + 74)$$

$$= 585$$

## B. Deret Ukur

Deret ukur ialah deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan perkalian terhadap sebuah bilangan tertentu. Bilangan yang membedakan suku-suku sebuah deret ukur dinamakan pengganda, yakni merupakan hasil bagi nilai suatu suku terhadap nilai suku di depannya.

Contoh:

- 4, 8, 16, 32, 64 (pengganda = 2)
- 3, 15, 75, 375, 1875 (pengganda = 5)
- 512, 256, 128, 64, 32 (pengganda = 0,5)

Untuk dapat membentuk rumus penghitungan suku tertentu dari sebuah deret ukur, dengan contoh pertama di atas dapat disajikan dalam bentuk:

$S_1 = 4 \quad = a$

$S_2 = 8 \quad = ap \qquad = ap^{2-1}$

$S_3 = 16 = app \qquad = ap^{3-1}$

$S_4 = 32 = appp \qquad = ap^{4-1}$

….

….

….

$S_n = a.p^{n-1}$

Dimana:

a ialah suku pertama

p ialah pengganda

n ialah indeks suku

berdasarkan rumus di atas, nilai suku ke-6 dalam contoh di atas masing-masing ialah:

- $S_6 = (4)\ (2)^{6-1} = 128$
- $S_6 = (3)\ (5)^{6-1} = 9375$
- $S_6 = (512)\ (0{,}5)^{6-1} = 16$

Seperti halnya dalam deret hitung, jumlah sebuah deret ukur sampai dengan suku tertentu adalah jumlah nilai suku-sukunya sejak suku pertama sampai dengan suku ke-n yang bersangkutan

$$\boldsymbol{J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

Berdasarkan $S_n = ap^{n-1}$, maka masing-masing $S_i$ dapat dijabarkan sehingga:

$J_n = a + ap + ap^2 + ap^3 + \ldots + ap^{n-2} + ap^{n-1}$

Apabila persamaan di atas dikalikan dengan pengganda p, maka

$pJ_n = ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + \ldots + ap^{n-1} + ap^n$

dengan mengurangkan persamaan kedua dari persamaan pertama, diperoleh selisih antara kedua persamaan ini yaitu:

$J_n - pJ_n = a - ap^n$

$J_n\ (1 - p) = a(1 - p^n)$

Sehingga dapat dibentuk rumus jumlah deret ukur sampai dengan suku ke-n:

$$\boldsymbol{J_n = \frac{a(1-p^n)}{1-p}}\ , atau$$

$$\boldsymbol{J_n = \frac{a(p^n-1)}{p-1}}$$

Dalam hal $|p| < 1$, penggunaan rumus yang pertama akan lebih mempermudah perhitungan. Sedangkan jika $|p| > 1$, rumus yang kedua akan lebih mempermudah dalam penghitungan.

Pada contoh deret ukur yang pertama, dimana a = 4 dan p = 2, maka jumlahnya sampai dengan suku ke-15 adalah:

$$J_{15} = \frac{4(2^{15}-1)}{2-1} = \frac{4\ (32767)}{1} = 131068$$

Sedangkan pada contoh ketiga, dimana a = 512 dan p =0,5, maka jumlahnya sampai dengan suku ke-10 adalah:

$$J_{10} = \frac{512(1-0{,}5^{10})}{1-0{,}5} = \frac{512(\frac{1023}{1024})}{0{,}5} = 1023$$

## C. Penerapan Ekonomi

### 1. Bunga Sederhana/tunggal

Bunga dalam teori bisnis merupaka suatu balas jasa yang dibayarkan bilamana kita menggunakan uang, nasabah membayar bunga kepada pihak bank yang meminjamkan uang. Dana yang diperoleh dari hasil pinjaman disebut juga dari sisi nasabah sebagai pinjaman pokok. Sehingga bunga dapat dilihat sebagai pendapatan, namun dapat pula dilihat sebagai biaya. Jika hanya pokok yang berbunga selama masa transaksi, bunga yang harus dibayar pada akhir tempo dikatakan bunga tunggal.

Misalkan P adalah pinjaman atau investasi dan i adalah tingkat suku bunga tahunan, maka pendapatan bunga pada akhir tahun pertama adalah $P_I$ dan jumlah dari P adalah $(P + P_i)$, sedangkan pada akhir tahun kedua nilai akumulasinya adalah P + P(2i) dan seterusnya sampai akhir tahun ke-n, nilai akumulasinya adalah $P + P_{in}$. Secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

**I = P.i.n**

Dimana:

I ialah pendapatan bunga

P ialah pinjaman pokok (investasi)

i ialah tingkat bunga tahunan

n ialah jumlah tahunan (waktu)

Adapun jumlah akumulasi selama n tahun dengan modal awal P, dinyatakan dengan persamaan:

**Fn = P + P.i.n** atau **Fn = P (1 + i.n)**

Bunga tunggal dapat dibagi menjadi: (a) bunga tunggal sebenarnya, yaitu yang dihitung dengan mengasumsikan bahwa satu tahun adalah 365 hari (366 hari untuk tahun kabisat); (b) bunga tunggal biasa yang dihitung dengan dasar satu tahun dihitung 360 hari. Penggunaan 360 hari dalam satu tahun sangat menyederhanakan perhitungan, juga pertambahan dari bunga.

- Jika besarnya pinjaman seseorang sejumlah Rp 50.000.000,- dengan tingkat bunga yang dikenakan adalah sebesar 12% per tahunnya, maka berapakah nilai secara keseluruhan jika pinjaman tersebut harus dikembalikan dalam waktu 5 tahun?

Jawab:

Diketahui : P = 50.000.000

i = 12%

Maka,

Bunga per tahun ialah I = $P_{in}$

Pendapatan bunga = (50.000.000) (0.12) = Rp 6.000.000,-

Bunga selama 5 tahun ialah Rp 6.000.000, - x 5 = Rp 30.000.000,-

Nilai yang terakumulasi selama 5 tahun:

Fn = P + P.i.n

= 50.000.000,- + Rp 30.000.000

= Rp 80.000.000,-

Maka jumlah pinjaman nasabah yang diakumulasi selama 5 tahun ialah sebesar Rp 80.000.000,-

- Tentukan bunga tunggal sebenarnya dan bunga tunggal biasa dari dana yang dipinjam sebesar Rp 2.000.000 untuk 50 hari dengan bunga 5%?

Jawab:

Bunga tunggal sebenarnya, dihitung dengan menganggap satu tahun adalah 365 hari, sehingga $n = \frac{50}{365} = \frac{10}{73}$, sehingga

Fn = 2.000.000 (0,05) $(10/73)$ = Rp 13.698,-

Kemudian, jika menggunakan bunga tunggal biasa yang menganggap satu tahun adalah 360 hari, sehingga $n = \frac{50}{360} = \frac{5}{36}$, sehingga

Fn = 2.000.000 (0,05) $(5/36)$ = Rp 13.899,-

Bagaimana jika tanggal jatuh tempo telah ditetapkan, yang menjadi pertanyaan berikutnya ialah bagaimana kita menentukan jumlah hari dimana bunga dihitung? Dalam menghitung jumlah hari dimana bunga dihitung dapat dicari dengan dua cara, yaitu:

a. Waktu sebenarnya, yaitu dhitung menurut hari yang sebenarnya dari seluruh jumlah hari dalam kalender. Dalam hal ini satu dari dua tanggal yang diberikan tidak dihitung;
b. Waktu pendekatan, dicari dengan menganggap bahwa tiap bulan terdiri dari 30 hari.

- Tentukan bunga tunggal sebenarnya dan bunga tunggal biasa apabila seseorang meminjam dana sebesar Rp 20.000.000 untuk 6% dari 20 April 2013 sampai 1 Juli 2013 dengan menggunakan waktu sebenarnya dan waktu pendekatan:

Jawab:

Waktu sebenarnya adalah 10 + 31 + 30 + 1 = 72 hari

Waktu pendekatan adalah 10 + 30 + 30 + 1 = 71 hari

Bunga tunggal sebenarnya adalah:

Fn = $20.000.000\ (0{,}06)(72/365) =$ Rp 236.712,-

Fn = $20.000.000\ (0{,}06)(71/365) =$ Rp 233.424,-

Bunga tunggal biasa adalah:

Fn = $20.000.000\ (0{,}06)(72/360) =$ Rp 240.000,-

Fn = $20.000.000\ (0{,}06)(71/360) =$ Rp 236.667,-

Metode yang paling sering dipergunakan ialah bunga tunggal biasa untuk waktu sebenarnya. Bagi bank komersil, ini disebut sebagai *banker's rule*. Karena ini merupakan bunga maksimum dalam berbagai transaksi.

Salah satu hal yang menjadi aplikasi dalam penggunaan bunga tunggal ialah promes. Promes adalah janji yang ditulis oleh debitur untuk membayar atau kesanggupan membayar kepada kreditur untuk sejumlah uang, dengan atau tanpa bunga, pada suatu tanggal tertentu. (Sembiring, dkk, 2005)

Untuk surat perjanjian tanpa tambahan bunga, maka nilai awal sama dengan nilai akhir. Dalam buku ini nilai akhir dari promes ditentukan dengan menggunakan: (a) waktu pendekatan jika temponya dalam bulan; (b) waktu sebenarnya jika temponya diberikan dalam hari.

- Berapa danakah yang harus seseorang investasikan hari ini dengan tingkat bunga sebesar 5%, dan dana ini akan menjadi sebesar Rp 10.000.000 dalam waktu 8 bulan?

Jawab:

Kita dapat mencari nilai tunai untuk return sebesar 5% dari dana sebesar Rp 100 juta pada waktu jatuh tempo dalam waktu 8 bulan.

Pn = $\frac{100.000.000}{1+(0{,}05)(8/12)} =$ Rp 96.805.421,-

Dana yang harus disediakan ialah sebesar Rp 96.805.421,-

## 2. Diskonto Tunggal

Nilai tunai dari uang yang berasal dari sejumlah uang yang dibayar pada hari yang berlainan dapat diinterpretasikan sebagai nilai diskonto.

- Tentukan nilai tunai untuk bunga tunggal 6% dari dana sebesar Rp 15.000.000 yang harus dibayar dalam 9 bulan. Berapakah diskonto sebenarnya?

Jawab:

$$Pn = \frac{15.000.000}{1+(0{,}06)(\frac{9}{12})} = \text{Rp } 14.354.066,\text{-}$$

Laju pertambahan diskonto didefinisikan sebagai perbandingan antara diskonto yang diberikan dalam suatu unit waktu terhadap sejumlah diskonto yang diberikan. Laju pertambahan diskonto tahunan dinyatakan dalam bentuk prosentase.

Suatu piutang dapat dijual sekali atau beberapa kali sebelum jatuh tanggal pembayarannya. Setiap pembeli memberikan diskonto dari nilai akhir perjanjian untuk waktu dari tanggal dijual sampai waktu jatuh tempo dengan suatu laju diskonto. Biasanya hal ini acap kali dilakukan pada produsen yang membutuhkan dana kas untuk produksi namun masih memiliki piutang di sejumlah distributor/agen yang mengambil barang kepadanya, sehingga piutang tersebut dijual kepada lembaga keuangan agar produsen tersebut dapat memiliki dana segar untuk berproduksi.

- Tentukan berapakah nilai diskonto dari suatu promes yang memiliki nilai sebesar Rp 30 juta serta jatuh tempo 8 bulan, apabila promes tersebut telah dijual pada bulan ke-5 dengan tingkat bunga sebesar 4% dan diskonto 8%.

Jawab:

Nilai akhir pada 8 bulan = 30.000.000 ( 1 + (0.04) (8/12)) = Rp 30.080.000,-

Apabila dijual pada bulan ke-5 dengan tingkat diskonto sebesar 8%, maka

Nilai diskonto = (30.080.000) (0,08) (5/12) = 1.002.667,-

Maka harga jual dari promes tersebut pada bulan ke-5 ialah:

Harga tunai = 30.080.000 – 1.002.667 = 29.077.333

- Suatu promes untuk 3 bulan sebesar Rp 10.000.000,- tertanggal 5 Mei dan jatuh tempo pada 5 Agustus telah dijual pada 26 Juni sebesar 6%. Tentukan perolehannya?

Jawab:

Tanggal pembayaran pada 5 Agustus dan nilai jatuh tempo sebesar Rp 10 juta. Tempo dari diskonto (dari 26 Juni sampai 5 Agustus) adalah 40 hari

Diskontonya adalah: 10 juta (0,06) (40/360) = Rp 66.667,-

Maka nilai perolehan dari promes tersebut pada 26 Juni adalah:

= 10.000.000 – 66.667 = 9.933.333,-

### 3. Bunga Majemuk

Bunga majemuk dapat diartikan sebagai perhitungan modal awal yang diakumulasikan dengan nilai bunga selama kurun waktu tertentu. Misalkan suatu investasi dari P rupiah pada tingkat bunga i per tahun, maka pendapatan bunga pada tahun pertama adalah $P_i$. Sedangkan pendapatan bunga pada tahun kedua, modal awal P sudah ditambahkan dengan tingkat suku bunga i, sehingga nilai uang pada akhir tahun pertama (masuk ke tahun kedua), menjadi:

$$P + P_i = P(1 + i)$$

Dan pada akhir tahun kedua (masuk tahun ketiga), menjadi:

$$P(1 + i) + P(1 + i)i = P + P_i + P_i + P_i^2$$
$$= P_i^2 + 2P_i + P$$
$$= P(1 + i)^2$$

Modal awal pada awal tahun ketiga, menjadi: $P(1 + i)^2$ i, dan seterusnya sehingga pada awal tahun ke-n, modal awal dapat dituliskan menjadi:

$$\mathbf{F_n = P(1 + i)^n}$$

Dimana:

$F_n$ ialah modal awal pada awal tahun ke-n

P ialah investasi

i ialah tingkat suku bunga

n ialah jumlah periode pinjaman

- Jika seseorang meminjam dana untuk tambahan modal usaha sebesar Rp 50.000.000,- kepada suatu lembaga keuangan konvensional dengan tingkat suku bunga yang dikenakan adalah sebesar 12% per tahun, dengan jangka waktu selama 5 tahun. Hitunglah berapa besarnya akumulasi pinjaman yang harus dibayarkan sampai dengan tahun ke-5?

Jawab:

Diketahui: P = 50.000.000

i = 12%

n = 5 tahun

$F_n = P\ (1 + i)^n$

$F_n = 50.000.000\ (1 + 0.12)^5$

$F_n = 88.117.084{,}16$

Sehingga akumulasi pinjaman yang harus dibayarkan oleh nasabah tersebut sampai dengan akhir tahun ke-5 ialah sebesar Rp 88.117.084,16

Apabila pembayaran bunga majemuk dilakukan per periode (dapat secara kuartal, bulanan, dan/atau semesteran), dapat dituliskan menjadi:

$$F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

Dimana:

$F_n$ ialah nilai uang di masa yang akan dating

P ialah nilai awal

i ialah tingkat suku bunga per tahun

m ialah frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

n ialah jangka waktu

Dengan contoh diatas, apabila pembayaran dilakukan setiap bulan, maka m = 12

$$F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

$$F_n = 50.000.000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12.5}$$

$F_n = 90.834.834{,}93$

Sehingga akumulasi pinjaman yang harus dibayarkan oleh nasabah dengan metode pembayaran dilakukan secara per bulan sampai dengan tahun ke-5 ialah sebesar Rp 90.834.834,92

Selanjutnya bagaimana jika pembayaran dilakukan tiap semester, maka m = 2

$$F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

$$F_n = 50.000.000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2.5}$$

$F_n = 89.542.384{,}83$

Akumulasi pinjaman yang harus dibayarkan ialah sebesar Rp 89.542.384,83

- Saldo tabungan seorang nasabah bank "ABC" sebesar Rp 532.400,-. Jika tingkat bunga bank yang berlaku ialah 10% per tahun (bunga diasumsikan konstan), berapa besarnya tabungan nasabah tersebut pada tiga tahun sebelumnya?

  F = 532.400

  n = 3

  i = 10%

  $P = \frac{1}{(1+i)^n} F$

  $P = \frac{1}{(1+0.1)^3} 532.400$

  = 400.000,-

Jadi besarnya tabungan mahasiswa tersebut pada tiga tahun sebelumnya dengan tingkat bunga 10% per tahun ialah sebesar Rp 400.000,-

- Seseorang menerima pembayaran pinjaman Rp 4.000.000,- atas pinjaman yang diberikan sebesar Rp 250.000,- beberapa tahun yang lalu. Jumlah sebanyak itu ia terapkan sebagai konsekuensi dari tingkat bunga 100% yang ditetapkan oleh orang tersebut. Berapakah jangka waktu pinjaman yang diberikan tersebut?

Jawab:

$F_n$ = 4.000.000

P = 250.000

i = 100% = 1

$F_n = P(1 + i)^n$

$4.000.000 = 250.000 (1 + 1)^n$

$16 = 2^n$

$2^n = 16$

$\log 2^n = \log 16$

$n \log 2 = \log 16$

$n = \frac{\log 16}{\log 2} = \frac{1,2041}{0,3010} = 4$

Jadi jangka waktu pinjaman yang diberikan selama 4 tahun.

### 4. Potongan Harga (Diskon)

Potongan harga atau diskon adalah pengurangan dari harga yang tertulis dalam faktur. Pada umumnya potongan selalu dinyatakan dalam bentuk presentase dari harga bruto.

*Contoh*:

Jika harga bruto dari mesin cuci adalah Rp 3.650.000,- dan potongan harganya adalah 40%. Berapakah harga netto faktur?

*Jawab*:

Potongan harga adalah 3.650.000 (0,40) = 1.460.000,-

Harga faktur netto = harga bruto – potongan harga

Harga netto = 3.650.000 – 1.460.000 = 2.190.000,-

Selain menggunakan cara tersebut diatas, dapat pula diselesaikan dengan cara berikut, yaitu:

Potongan 40% dari nilai bruto memberikan sisa (1 – 0,40) = 0,60 atau 60% dari harga bruto.

Harga faktur = 3.650.000 (0,60)

= 2.190.000,-

Lalu bagaimanakah jika terdapat dua atau lebih potongan harga yang diberikan oleh penjual kepada pembeli. Hal ini banyak kita lihat di pusat perbelanjaan yang misalnya memberikan potongan harga 20% ditambah lagi dengan 10%, jika seperti ini bagaimanakah cara menghitungnya? Cara menghitungnya ialah harus dihitung secara berurutan.

*Contoh:*

Jika suatu perusahaan "CV RIDHA" yang menjual furniture memberikan potongan harga Ramadhan berturut-turut yaitu 20%, 10%, dan 5%. Tentukanlah harga faktur untuk pembelian jika diketahui harga pembelian bruto adalah sebesar Rp 1.950.000,-

*Jawab*:

**Penyelesaian pertama:**

Harga bruto = 1.950.000

Potongan pertama = 1.950.000 (0,20) = 390.000

Sisa pertama = 1.950.000 – 390.000 = 1.560.000

Potongan kedua = 1.560.000 (0,10) = 156.000

Sisa kedua = 1.560.000 – 156.000 = 1.404.000

Potongan ketiga = 1.404.000 (0,05) = 70.200

Sisa ketiga = 1.404.000 – 70.200 = 1.333.800,-

Sehingga harga faktur ialah sebesar 1.333.800,-

**Penyelesaian kedua**:

Harga bruto = 1.950.000

Sisa pertama = 1.950.000 (0,80) = 1.560.000

Sisa kedua = 1.560.000 (0,90) = 1.404.000

Sisa ketiga = 1.404.000 (0,95) = 1.333.800,-

## 5. Depresiasi (Penyusutan)

Depresiasi atau penyusutan ialah hilangnya nilai dari aktiva tetap (bangunan atau mesin) selama dipakai. Dalam hal untuk mengembalikan aktiva pada akhir umur ekonomisnya, perusahaan akan menaruh sebagian dari keuntungannya tiap tahun sebagai beban penyusutan. Setiap saat jumlah perbedaan antara nilai perolehan dengan jumlah biaya penyusutan dinamakan dengan nilai buku (*book value*) dari aktiva/aset. Pada akhir umur kegunaan, nilai buku dari aset adalah merupakan nilai sisa.

Dalam metode yang sederhana untuk perhitungan penyusutan, dinamakan metode garis lurus yang sama dengan penyimpanan tahunan selama umur ekonomis dari aset yang dianggap sebagai biaya penyusutan.

*Contoh:*

Mesin dengan harga perolehan Rp 10.000.000,- ditaksir memiliki umur ekonomis selama 4 tahun dan nilai sisa Rp 2.000.000,-. Tentukan penyusutan rata-rata tahunan.

*Jawab:*

Total penyusutan = harga perolehan – nilai sisa

= 10.000.000 – 2.0000.000

= 8.000.000,-

Penyusutan rata-rata tahunan = $\frac{8.000.000}{4} = 2.000.000$

Metode dalam menentukan penyusutan tahunan merupakan suatu hal yang penting untuk dibahas. Misal, penyusutan dari aset untuk tahun pertama pemakaian sering lebih besar dibandingkan dengan penyusutan tahun kedua, demikian pula penyusutan tahun kedua lebih besar daripada penyusutan tahun ketiga, demikian seterusnya.

Daftar penyusutan dari suatu mesin dapat dijelaskan sebagai berikut. Metode prosentase tetap dari suatu objek, dengan asumsi bahwa penyusutan dihitung pada tiap akhir tahun yang dinyatakan dalam prosentase tetap dari nilai buku pada permulaan tahun.

Misal suatu aset memiliki nilai awal H dan nilai sisa S, dan perkiraan umur ekonomis adalah *n* tahun. Jika p adalah prosentase tetap per-tahun. Maka pada akhir tahun pertama beban penyusutan adalah Hp dan nilai bukunya adalah H – Hp = H (1 – p). Pada akhir tahun kedua, penyusutan adalah H (1- p)p dan nilai bukunya adalah H(1 – p) – H (1 – p)p = H (1 – p) (1-p) = H $(1 - p)^2$.

Nilai buku selama umur pemakaian aset adalah merupakan suku-suku dari deret geometri:

H(1 – p), H $(1 - p)^2$, H$(1 - p)^3$

Karenanya pada akhir tahun ke-*n*, nilai bukunya:

H$(1 - p)^n$ = S

Nilai dari p, atau laju penyusutan mungkin merupakan nilai estimasi (perkiraan) atau mungkin ditentukan dari rumus di atas.

*Contoh:*

Suatu mesin memiliki harga perolehan sebesar Rp 4.800.000,- dan diperkirakan memiliki umur ekonomi sampai 6 tahun dan memiliki nilai sisa sebesar Rp 360.000,-. Tentukan laju penyusutan dan buatlah daftar penyusutannya.

*Jawab*:

H = 4.800.000,- S = 360.000,-, *n* = 6

Dengan menggunakan rumus H$(1 - p)^n$ = S

4.800.000$(1 - p)^6$ = 360.000

$$(1 - p)^6 = \frac{360.000}{4.800.000}$$

$$(1 - p)^6 = 0{,}075$$

6 log (1 – p) = log 0,075 = 8,875061 – 10

log (1 – p) = 9,812510 – 10

1 – p = 0,6494

p = 0,3506

p = 35,06%

Dalam daftar, nilai buku akhir tahun pertama, kedua, dan ke-*n* tahun dapat dihitung dari rumus H(1 – p), H $(1 - p)^2$, H$(1 - p)^3$, dst.

Tahun ke-1 4.800.000 (0,6494) = 3.117.120

Tahun ke-2 4.800.000 $(0,6494)^2$ = 2.024.257

Tahun ke-3 4.800.000 $(0,6494)^3$ = 1.314.552

dst

Penyusutan untuk berbagai tahun adalah berbeda antara nilai buku tahun itu dengan tahun yang lain. Jumlah cadangan penyusutan pada akhir tahun adalah merupakan jumlah beban penyusutan yang mencakup tahun tersebut atau sama dengan selisih antara nilai awal dengan nilai buku saat itu.

(dalam ribuan rupiah)

| Umur | Nilai buku pada akhir tahun | Beban penyusutan | Jumlah cadangan penyusutan |
|---|---|---|---|
| 0 | 4800,00 | | |
| 1 | 3117,12 | 1682,88 | 1682,88 |
| 2 | 2024,26 | 1092,86 | 2775,74 |
| 3 | 1314,55 | 709,71 | 3485,45 |
| 4 | 853,67 | 460,88 | 3946,45 |
| 5 | 554,37 | 299,30 | 4245,63 |
| 6 | 360,00 | 194,37 | 4440,00 |

## 6. Model Perkembangan Usaha

Jika perkembangan variabel-variabel tertentu dalam kegiatan usaha –misalnya produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja, atau penanaman modal- yang memiliki pola seperti deret hitung, maka prinsip-prinsip deret hitung dapat digunakan untuk menganalisis perkembangan variabel tersebut.

- Perusahaan bata "Sumber Jaya" menghasilkan 5.000 buah bata pada bulan pertama produksinya. Dengan penambahan tenaga kerja dan peningkatan produktivitas, perusahaan mampu menambah produksi sebanyak 500 buah bata setiap bulan. Jika perkembangan produksinya diasumsikan konstan, Hitunglah: a) Berapa buah bata yang dihasilkannya pada bulan keenam? b) Serta berapa jumlah akumulasi bata yang telah dihasilkan sampai dengan bulan keenam?

Jawab:

Diketahui:

$a = 5.000$

$b = 500$

$n = 6$

$S_6 = 5.000 + (6 - 1)500$

$= 7.500$

Sehingga produksi yang dihasilkan pada bulan keenam ialah 7.500 buah bata

Kemudian jumlah akumulasi produksi bata sampai dengan bulan keenam ialah:

$J_6 = \frac{6}{2}(5000 + 7.500)$

$= 37.500$

Sehingga akumulasi produksi bata yang dihasilkan dari bulan pertama sampai dengan bulan keenam ialah sebesar 37.500 bata

a) Pendapatan Toserba "Ananda" yang berasal dari penjualan barangnya pada tahun ke-5 sebesar Rp 720.000.000,- dan pada tahun ke-7 ialah sebesar Rp 980.000.000, jika pendapatan berpola deret hitung. Hitunglah: a) Berapa pendapatan per tahun? B) Berapa besar penerimaan pada tahun pertama? c) Pada tahun keberapa pendapatan Toserba Anada sebesar Rp 1,37 milyar?

Jawab: (dalam jutaan rupiah)

$S_n = a + (n - 1)b$

$S_7 = 980 \rightarrow a + (7 - 1)b = 980$

$= a + 6b = 980$

$S_5 = 720 \rightarrow a + (5 - 1)b = 720$

$= a + 4b = 720$

Kemudian dilakukan eliminasi:

$a + 6b = 980$

$\underline{a + 4b = 720}$ _

$2b = 260 \rightarrow b = 130$

maka besarnya pendapatan per tahun yang mampu dihasilkan oleh Toserba "Ananda" ialah sebesar Rp 130.000.000,-

Kemudian nilai b dimasukkan pada salah satu persamaan di atas

$a + 4b = 720$

$a = 720 – 4 (130)$

$a = 200$

Maka, besarnya pendapatan yang mampu dihimpun oleh Toserba "Ananda" pada tahun pertamanya ialah sebesar Rp 200.000.000,-

Kemudian pendapatan sebesar Rp 1, 37 milyar mampu didapat pada tahun:

$S_n = a + (n – 1)b$

$1.370 = 200 + (n – 1)130$

$1.370 = 200 + 130n – 130$

$1.370 = 70 + 130n$

$1.300 = 130n$

$n = 1300/130 \rightarrow n = 10$

Maka pendapatan sebesar Rp 1,37 milyar mampu didapat pada tahun ke-10.

- Pabrik mie instan "Lezat" menghasilkan sejuta bungkus mie instan pada tahun pertama berdirinya, dan 1,6 juta bungkus pada tahun ketujuh. Andaikan perkembangan produksinya konstan. a) berapa tambahan produksinya per tahun? b) Berapa produksinya pada tahun kesebelas? c) pada tahun ke berapa produksinya akan mencapai 2,5 juta bungkus? d) berapa bungkus mie instan yang akan dihasilkan sampai dengan tahun ke-16?

Jawab:

$a = 1.000.000$

$S_7 = 1.600.000$

$S_7 = a + (7 – 1)b = 1.600.000$

$a + 6b = 1.600.000$

$6b = 1.600.000 – a$

$6b = 1.600.000 - 1.000.000$

$6b = 600.000 \rightarrow b = 100.000$

a) Tambahan produksinya per tahun ialah 100.000 bungkus mie instan

b) Produksi pada tahun kesebelas ialah:

$S_{11} = a + (11 - 1)b$

$= 1.000.000 + (10)\ 100.000 \quad = 2.000.000$ bungkus mie instan

c) Produksi sebesar 2,5 juta bungkus

$S_n = a + (n - 1)b$

$2.500.000 = 1.000.000 + (n - 1)\ 100.000$

$2.500.000 = 1.000.000 + 100.000n - 100.000$

$1.600.000 = 100.000n \rightarrow n = 16$

d) Jumlah mie instan yang telah dihasilkan sampai dengan tahun ke-16

$J_{16} = \frac{16}{2}(1\ juta + 2,5\ juta)$

$J_{16} = 8(3,5\ juta)$

= 28 juta bungkus mie instan

## 7. Model Pertumbuhan Penduduk

Penerapan deret ukur yang paling konvensional di bidang ekonomi adalah dalam hal menaksir jumlah penduduk. Dalam teori Malthus, penduduk dunia tumbuh mengikuti pola deret ukur. Secara matematik dapat dirumuskan sebagai:

$P_t = P_0\ R^{t-1}$

Dengan $R = 1 + r$

Dimana

$P_0$ ialah jumlah penduduk pada tahun pertama

$P_t$ ialah jumlah penduduk pada tahun ke-t

$r$ ialah persentase pertumbuhan penduduk per tahun

$t$ ialah indeks waktu (tahun)

- Misalkan penduduk di kota Jakarta berjumlah sebesar 5 juta jiwa pada tahun 2010, tingkat pertumbuhan penduduk sebesar 2 persen per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kota Jakarta pada tahun 2025. Jika mulai tahun 2025 pertumbuhannya meningkat menjadi 3 persen per tahun, berapakah jumlah penduduk 10 tahun kemudian?

Jawab:

$P_0$ = 5 juta

r = 0,02 → R = 1,02

Maka penduduk pada tahun 2025 ialah:

$P_{2025}$ = 5juta $(1,02)^{15}$

= 6.729,341 jiwa

Jumlah penduduk di Jakarta pada tahun 2025 dengan asumsi pertumbuhan penduduk konstan 2% per tahun ialah sebesar 6.729.341 jiwa

Kemudian jumlah penduduk 10 tahun kemudian, apabila persentase pertumbuhan penduduk meningkat menjadi 3% per tahun ialah:

$P_{2035}$ = 6.729.341 $(1,03)^{10}$

= 9.043.671 jiwa

Jumlah penduduk di kota Jakarta pada sepuluh tahun kemudian (atau tahun 2035) dengan asumsi pertumbuhan penduduk setelah tahun 2025 meningkat menjadi 3% per tahun ialah sebesar 9.043.671 jiwa

Atau dengan memanfaatkan kaidah logaritma dapat diperoleh:

$P_{2035}$ = 6.729.341 $(1,03)^{10}$

log $P_{2035}$ = log 6.729.341 $(1,03)^{10}$

log $P_{2035}$ = log 6.729.341 + 10 log 1,03

log $P_{2035}$ = 6,827972536 + 0,128372247

log $P_{2035}$ = 6,956344783

$P_{2035}$ = 9.043.671 jiwa

- Penduduk di suatu kota di Sulawesi tercatat 2,5 juta jiwa pada tahun 2002 dan diperkirakan menjadi 3 juta jiwa pada tahun 2006. Jika tahun 2000 dianggap merupakan tahun basis. a) berapa persen tingkat pertumbuhannya? b) berapa jumlah penduduknya pada tahun 2000? c) berapa pula jumlah pada tahun 2011? Pada tahun berapa penduduknya berjumlah 5 juta jiwa?

Jawab:

Pada contoh ini tahun 2000 = tahun ke-1; tahun 2002 = tahun ke-3, 2006 = tahun ke-7, dan 2011 = tahun ke-12

a) $P_7 = P.r^6$ = 3 juta
   $P_3 = P.r^2$ = 2,5 juta

$$\left.\begin{array}{l} P_7 = P.r^6 = 3 \text{ juta} \\ P_3 = P.r^2 = 2{,}5 \text{ juta} \end{array}\right\} \begin{array}{l} r^4 = 1{,}2 \\ r = \sqrt[4]{1{,}2} = 1{,}0466 \end{array}$$

Tingkat pertumbuhan penduduknya = r – 1 = 0,0466 = 4,66%

b) $P_3 = P.r^2 \rightarrow P = \frac{P_3}{r_2} = \frac{2.500.000}{1.0954} = 2.282.271$

Jumlah penduduknya pada tahun 1990 = 2.282.271 jiwa

c) Penduduk pada tahun 2011

$P_{12} = P.r^{11} \rightarrow$ $P_{12} = 2.282.271\ (1{,}0466)^{11}$

$\log P_{12} = \log 2.282.271\ (1{,}0466)^{11}$

$\log P_{12} = \log 2.281.271 + 11 \log (1{,}0466)$

$\log P_{12} = 6{,}3583 + 11\ (0{,}0195)$

$\log P_{12} = 6{,}5728 \rightarrow P_{12} = 3.739.383$ jiwa

d) Tahun pada saat penduduk berjumlah 5 juta jiwa

$P_n = P.r^{n-1}$

$5.000.000 = 2.282.271\ (1{,}0466)^{n-1}$

$(1{,}0466)^{n-1} = 2{,}19$

$\log (1{,}0466)^{n-1} = \log 2{,}19$

$(n-1) \log (1{,}0466) = \log 2{,}19$

$(n-1)\ (0{,}0195) = 0{,}3404$

$n-1 = 17{,}45$

$n = 18{,}45$

Penduduk kota tersebut akan mencapai ± 5 juta jiwa akan tejadi pada tahun ke-18, yaitu pada tahun 2017.

**Latihan Soal**

1. Hitunglah bunga sederhana dari masing-masing informasi di bawah ini:
   a. P = Rp 20.000.000,-; n = 4 tahun; i = 12% per tahun
   b. P = Rp 35.000.000,-; n = 7 tahun; i = 15% per tahun
2. Hitunglah nilai uang dari masa yang akan datang dengan menggunakan pola majemuk dari masing-masing informasi di bawah ini:
   a. P = Rp 20.000.000,-; n = 4 tahun; i = 12% per tahun
   b. P = Rp 35.000.000,-; n = 7 tahun; i = 15% per tahun
3. Hitunglah nilai uang di masa yang akan datang jika pembayarannya dilakukan seperti di bawah ini:

   P = Rp 20.000.000,-; n = 4 tahun; i = 12% per tahun
   - Pembayaran dilakukan setiap bulan
   - Pembayaran dilakukan setiap kuartal
   - Pembayaran dilakukan setiap semester
   - Pembayaran dilakukan tiap tahun
4. Hitunglah nilai uang di masa yang akan datang jika pembayarannya dilakukan seperti di bawah ini

   P = Rp 35.000.000,- ; n = 7 tahun; i = 15% per tahun
   - Pembayaran dilakukan setiap bulan
   - Pembayaran dilakukan setiap kuartal
   - Pembayaran dilakukan setiap semester
   - Pembayaran dilakukan tiap tahun
5. Suatu promes dengan jangka waktu 6 Mulai sebesar Rp 250.000.000,- dengan bunga sebesar 6% dengan tanggal awal promes adalah 20 Maret dan tanggal jatuh tempo adalah 20 September didiskontokan pada tanggal 7 Juli sebesar 5%. Hitunglah nilai perolehan dari promes tersebut pada tanggal 7 Juli?
6. Tentukan jumlah uang yang seharusnya diinvestasikan supaya mencapai nilai investasinya sebesar Rp 15.000.000,- pada akhir tahun k-3, dengan tingkat bunga sebesar 12% per tahun, dengan menggunakan bunga majemuk secara:
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap bulan
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap kuartal
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap semester

- Pembayaran *return* dilakukan setiap tahun

7. Tentukan jumlah uang yang seharusnya diinvestasikan supaya mencapai nilai investasinya sebesar Rp 100.000.000,- pada akhir tahun k-5, dengan tingkat bunga sebesar 10% per tahun, dengan menggunakan bunga majemuk secara:
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap bulan
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap kuartal
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap semester
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap tahun
8. Jika penduduk di Propinsi Jawa Timur berjumlah sebesar 25 juta jiwa pada tahun 2013, tingkat pertumbuhan penduduk sebesar 4 persen per tahun. Hitunglah jumlah penduduk di Jawa Timur pada tahun 2030. Jika mulai tahun 2030 pertumbuhannya menurun menjadi 3 persen per tahun, berapakah jumlah penduduk 10 tahun kemudian?
9. Misal Penduduk di Propinsi Papua Barat tercatat 5 juta jiwa pada tahun 2012 dan diperkirakan menjadi 6 juta jiwa pada tahun 2016. Jika tahun 2010 dianggap merupakan tahun basis. a) berapa persen tingkat pertumbuhannya? b) berapa jumlah penduduknya pada tahun 2010? c) berapa pula jumlah pada tahun 2021? Pada tahun berapa penduduknya berjumlah 10 juta jiwa?
10. Misalkan penduduk suatu Negara "XYZ" tercatat 200 juta jiwa pada tahun 2010, tingkat pertumbuhan pendudukan adalah 2 persen per tahun. Hitunglah jumlah penduduk di Negara tersebut pada 10 tahun yang akan datang?

# BAB 4
# FUNGSI

Pemahaman akan konsep fungsi sangatlah penting dalam mempelajari ilmu ekonomi, karena banyak teori-teori ekonomi yang bekerja dengan fungsi, baik fungsi yang berbentuk persamaan maupun pertidaksamaan. Fungsi berbentuk persamaan ialah fungsi yang ruas kiri dan ruas kanannya dihubungkan dengan tanda kesamaan (=), sedangkan fungsi yang berbentuk pertidaksamaan ialah fungsi yang ruas kiri dan ruas kanannya dihubungkan dengan tanda ketidaksamaan (≤ atau ≥). Bab ini akan menjelaskan berbagai konsep fungsi serta penerapan ekonomi dari fungsi yang bersangkutan.

## A. Pengertian Konstanta, Variabel dan Fungsi

Dalam pembahasan fungsi, sebenarnya dibahas pula konstanta dan variabel yang terdapat dalam fungsi tersebut.

### 1. Koefisien dan konstanta

Koefisien ialah bilangan atau angka yang terkait pada dan terletak di depan suatu variabel dalam sebuah fungsi. Adapun Konstanta adalah suatu bilangan yang tetap tidak berubah-ubah. Notasi atau tanda dari konstanta dinyatakan dengan a, b, c, dan seterusnya. Jika terdapat fungsi:

$y = a\,x + b$ atau $y = a\,x^2 + b\,x + c$

maka a, b, dan c inilah yang disebut konstanta.

*Contoh:*

$y = 3x + 15$

Maka konstanta a = 3 dan b = 15

Besarnya a = 3 dan b = 15 tidak dipengaruhi oleh perubahan x dan y.

Bentuk y = f(x) di atas berarti menyatakan bahwa y merupakan fungsi x, besar kecilnya nilai y tergnatung pada atau fungsional terhadap nilai x. Masing-masing x dan y adalah variabel. Dalam hal ini x adalah variabel bebas karena nilainya tidak tergantung pada nilai variabel lain (y) dalam fungsi tersebut. Sebaliknya y adalah variabel terikat karena nilainya tergantung pada nilai x.

## 2. Variabel

Variabel ialah unsur pembentuk fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor tertentu. Notasi atau tanda dari variabel ini biasanya dinyatakan dengan x, y, z, dan seterusnya. Apabila terdapat fungsi:

$y = 3x + 15$ atau $z = x + 2xy - 6$

Maka, x, y, dan z inilah yang disebut variabel. Variabel x, y, dan z ini saling memengaruhi.

Berdasarkan kedudukan atau sifatnya, di dalam setiap fungsi terdapat dua macam variabel yaitu variabel bebas dan variabel terikat. Variabel bebas ialah variabel yang nilainya tidak tergantung pada variabel lain, sedangkan variabel terikat ialah variabel yang nilainya tergantung pada variabel lain.

Pada dasarnya variabel dapat dibedakan menjadi dua, yaitu variabel kualitatif dan variabel kuantitatif. Variabel kualitatif adalah sesuatu yang sifatnya tidak tetap, tetapi berubah-ubah (atau variabel) yang tidak dapat diukur, seperti selera, preferensi, kepuasan, dan lainnya. Sementara itu, variabel kuantitatif adalah sesuatu yang sifatnya tidak tetap, tetapi berubah-ubah (atau variabel) yang dapat diukur, seperti dalam kilogram, ton, unit, satuan moneter, rupiah, hari, dan sebagainya. Misalnya jumlah penjumlahan yang dijual suatu perusahaan adalah variabel kuantitatif dalam rupiah.

Variabel kuantitatif dapat dibedakan pula atas dua macam yaitu variabel yang kontinu dan variabel yang deskrit. Variabel kuantitatif kontinu adalah variabel yang dapat diukur sampai dengan bilangan yang sekecil-kecilnya atau pecahan, seperti ukuran satuan volume, satuan berat, satuan panjang, satuan waktu, satuan uang, dan sebagainya. Sementara itu. Variabel deskrit adalah variabel kuantitatif yang hanya dapat diukur dengan bilangan-bilangan bulat dan tidak mungkin dengan bilangan pecahan, seperti penjualan mainan atau penjualan baju.

## 3. Fungsi

Fungsi ialah suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara satu variabel dengan variabel lain. Unsur-unsur yang membentuk fungsi adalah variabel, koefisien, dan konstanta. Variabel dan koefisien senantiasa terdapat dalam setiap bentuk fungsi, akan tetapi tidak demikian halnya dengan konstanta. Sebuah fungsi yang secara konkret dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan, mungkin sekali mengandung sebuah konstanta dan mungkin pula tidak. Walaupun sebuah persamaan atau pertidaksamaan tidak mengandung konstanta, tidaklah mengurangi artinya sebagai sebuah fungsi.

Contoh fungsi ialah:

y = f (x) atau z = f (x, y)

x, y, dan z yang disebut variabel. Variabel yang terdapat dalam suatu fungsi dapat dibedakan atas variabel bebas (*independent variables*) dan variabel yang dipengaruhi/tidak bebas (*dependent variables*). Variabel bebas (*independent variables*) adalah variabel yang besarannya dapat ditentukan sembarang, misalnya 1, 5; 0; 8 dan seterusnya. Sebaliknya, variabel yang dipengaruhi/tidak bebas (*independent variables*) adalah variabel yang besarnya dapat ditentukan setelah nilai variabel bebasnya ditentukan terlebih dulu.

*Contoh:*

Bila y = 3x + 15

Dalam hal ini x merupakan variabel bebas dan y merupakan variabel yang dipengaruhi/tidak bebas. Untuk mengetahui besaran/nilai y, terlebih dahulu ditentukan besaran/nilai x. Dengan demikian, dapat diperoleh besaran/nilai y dari nilai x sembarang, yaitu:

| | | |
|---|---|---|
| | Bila x = - 6, | maka y = -3 |
| | Jika x = 0, | maka y = 15 |
| Serta | bila x = 2, | maka y = 21 |

Demikian seterusnya.

Dalam pembahasan mengenai suatu fungsi, terdapat istilah yang disebut "nilai fungsi". Nilai fungsi adalah besaran atau nilai dari y atau fungsi tersebut (nilai dari variabel yang dipengaruhi/tidak bebas). Berdasarkan contoh di atas,

y = f (x) adalah y = 3x + 15;

bila x = 3; y = f (x) = f (3) = 3 (3) + 15 = 24;

jika x = 2; y = f (x) = f (2) = 3 (2) + 15 = 21

Dengan melihat hubungan antara variabel-variabel yang terdapat dalam suatu fungsi, dapat dibedakan dua jenis fungsi. Jenis fungsi itu adalah fungsi eksplisit dan fungsi implisit.

**a. Fungsi Eksplit**

Fungsi eksplit adalah suatu fungsi yang antara variabel bebas/menentukan dan variabel tidak bebas/dipengaruhi dapat dengan jelas dibedakan. Sebagai contoh:

$y = f(x)$ adalah $y = 2x + 4$

Dalam hal ini besaran/nilai y ditentukan oleh besaran/nilai x, sehingga x adalah variabel bebas/menentukan dan variabel y adalah variabel yang dipengaruhi/tidak bebas. Jadi jika $x = 3$ maka $y = 2(3) + 4 = 10$; dan jika $x = 2$ maka $y = 2(2) + 4 = 8$. Contoh ini merupakan fungsi eksplisit dengan satu variabel bebas (*independent*). Apabila ditemui dua variabel bebas (*independent*) seperti contoh berikut:

$z = f(x,y)$ adalah $z = 2x + y^2 + 3$

maka, dalam hal ini terlihat bahwa:

x dan y adalah variabel bebas/menentukan, dan

z adalah variabel yang dipengaruhi/tidak bebas.

Jadi, besaran atau nilai z hanya bisa diketahui setelah besaran/nilai x dan y ditentukan lebih dahulu secara sembarang.

Misalnya:

bila $x = 2$ dan $y = 3$ maka $z = 2(2) + (3)^2 = 16$ dan

Jika $x = 5$ dan $y = 2$ maka $z = 2(5) + (2)^2 + 3 = 17$.

**b. Fungsi implisit**

Fungsi implisit adalah fungsi yang antara variabel bebas dan variabel tidak bebas yang dipengaruhi tidak dapat dengan mudah/jelas dibedakan. Bentuk umum fungsi implisit ini dinyatakan dengan:

$f(x,y) = 0$ untuk dua variabel, dan

$f(x, y, z) = 0$ untuk tiga variabel.

Sebagai contoh: $f(x,y) = 0$ adalah $2x + 3y – 5 = 0$. Dalam contoh ini, variabel x dan variabel y tidak jelas mana yang merupakan variabel bebas dan mana yang merupakan variabel tidak bebas/yang dipengaruhi. Apabila ditetapkan suatu nilai untuk variabel x, dapat diperoleh variabel y. Demikian pula sebaliknya apabila ditetapkan suatu nilai untuk variabel y, variabel x dapat diperoleh:

Jadi, jika x = 1, maka y = 1 dan jika nilai y ditentukan terlebih dahulu, yaitu y = 3, diperoleh x = -2

Contoh untuk fungsi implisit dengan tiga variabel:

f = (x, y, z) = 0 adalah 2x + y – 3z + 4 = 0

Dalam hal ini variabel-variabel x, y dan z tidak dapat dengan mudah ditentukan mana variabel bebas dan mana variabel tidak bebas/yang dipengaruhi. Dengan begitu, jika ditentukan dua buah variabel lebih dahulu (misalnya x dan y atau x dan z, ataupun y dan z), barulah dapat diperoleh nilai dari variabel lainnya.

Jadi, apabila nilai x dan y ditentukan terlebih dahulu, misalnya x = 1 dan y = 3, diperoleh z = 3. Demikian pula jika nilai x dan z ditentukan terlebih dahulu, misalnya x = 2 dan z = 5, diperoleh y = 7. Selanjutnya, jika nilai y dan z ditentukan lebih dahulu, misalnya y = 2 dan z = 4, diperoleh x = 3.

### 4. Koordinat

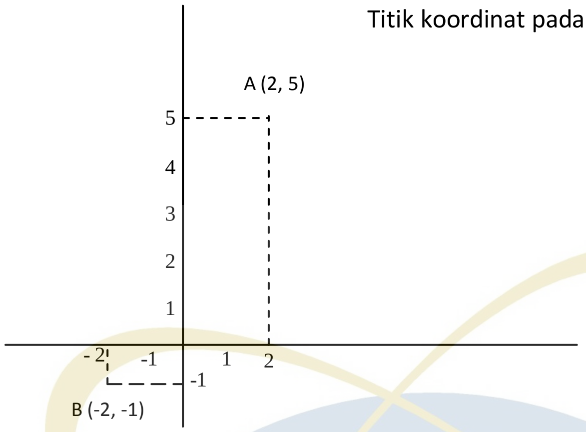
Pembahasan mengenai masalah fungsi matematika tidak terlepas dari pembahasan tentang koordinat. Jika ingin menggambarkan grafik atau fungsi, grafik fungsi itu dapat digambarkan. Hal itu apabila titik-titik dalam bidang datar yang menunjukkan letak dari gambaran grafik tersebut telah ditentukan. Titik-titik ini dapat ditentukan dengan dasar suatu ukuran yang digunakan dari titik asal (*origin point)* sebagai titik tolak pengukuran dan penentuan letak titik dalam gambar grafik suatu fungsi. Titik penentu inilah letak titik dalam grafik suatu fungsi. Titik inilah yang disebut koordinat, yang terdiri dari ukuran *obsis*, yaitu jarak titik dengan sumbu vertikal yang terlihat dari ukuran pada sumbu horizontal dan ukuran *ordinat*. Ukuran ordinat yaitu jarak titik dengan sumbu horizontal, yang terlihat dari ukuran titik pada sumbu vertikal.

*Contoh:*

Dalam fungsi y = 2x + 3

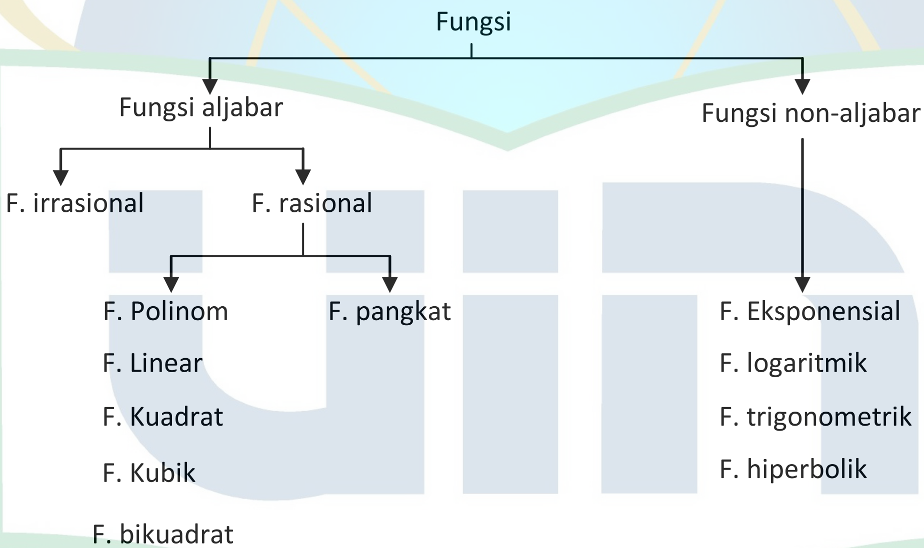
Absisnya ialah x = 2 dan ordinatnya ialah y = 2(2) + 3 = 7, sehingga diperoleh titik koordinat A (2,7). Kemudian bila x = -2, maka titik ordinatnya ialah y = -1, sehingga koordinat (-2, -1). Apabila digambarkan akan terlihat titik koordinat A seperti pada gambar berikut:

Gambar 3.1.
Titik koordinat pada fungsi y =2x+3




## B. Fungsi Aljabar

Terdapat beberapa jenis fungsi antara lain fungsi aljabar, fungsi exponensial dan fungsi logaritma. Secara garis besar fungsi dikelompokkan atas fungsi aljabar dan kelompok fungsi non-aljabar.




Gambar 3.2.
Pembagian Jenis Fungsi

Sumber:
Dumairy (2003)

Fungsi polinom ialah fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya. Bentuk umum persamaan polinom adalah:

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. pangkat tertinggi pada variabel suatu fungsi polinom mencerminkan derajat pilinomnya serta mencerminkan derajat fungsi.

Fungsi linear ialah fungsi polinom khusus yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat satu, oleh karenanya sering juga disebut fungsi berderajat satu. Bentuk umum persamaan linear adalah: $y = a_0 + a_1x$; dimana $a_0$ adalah konstanta dan $a_1 \neq 0$. Fungsi-fungsi lain yang pangkat tertinggi dari variabelnya lebih dari satu, secara umum disebut fungsi non-linear, ini meliputi fungsi kuadrat, fungsi kubik, fungsi bikuadrat, dst.

Fungsi kuadrat ialah fungsi polinom yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat dua, sering juga disebut fungsi berderajat dua. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$; dimana $a_0$ adalah konstanta, sedangkan $a_1$ dan $a_2$ adalah koefisien, $a_2 \neq 0$.

Fungsi berderajat n ialah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat n (n = bilangan nyata). Bentuk umumnya:

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$; dimana $a_0$ adalah konstanta, $a_1$ hingga $a_n$ adalah koefisien, dan $a_n \neq 0$.

Fungsi pangkat ialah fungsi yang variabel bebasnya berpangkat sebuah bilangan nyata bukan nol, bentuk umumnya: $y = x^n$; dimana: n ialah bilangan nyata bukan nol.

Fungsi eksponensial ialah fungsi yang variabel bebasnya merupakan pangkat dari konstanta bukan nol. Bentuk umumnya: $y = n^x$; dimana $n > 0$

Fungsi logaritmik ialah fungsi balik (*inverse*) dari fungsi eksponensial, variabel bebasnya merupakan bilangan logaritmik. Bentuk umumnya:

$y = {}^{n}\log x$.

Fungsi trigonometrik dan fungsi hiperbolik ialah fungsi yang variabel bebasnya merupakan bilangan-bilangan goneometrik

Contoh persamaan trigonometrik : $y = \sin 4x$

Contoh persamaan hiperbolik : $y = \text{arc} \cos 3x$

Dalam bagian ini akan diuraikan mengenai fungsi aljabar. Sementara itu, fungsi exponensial dan fungsi logaritma akan diuraikan pada bagian berikutnya. Fungsi aljabar terdiri dari fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi pangkat banyak (pangkat tiga, empat, dan seterusnya), dan fungsi pecah.

### 1. Fungsi Linear

Fungsi linear atau fungsi garis lurus adalah suatu fungsi yang variabel bebas (*independent variabel)*-nya paling tinggi berpangkat satu. Grafik fungsi linear ini, apabila digambarkan merupakan suatu garis lurus. Bentuk umum fungsi linear *explicit* y = f (x) adalah y = ax + b dimana a dan b adalah konstanta

x adalah variabel bebas (*independent variable)*

y adalah variabel tidak bebas/yang dipengaruhi (*dependent variable)*

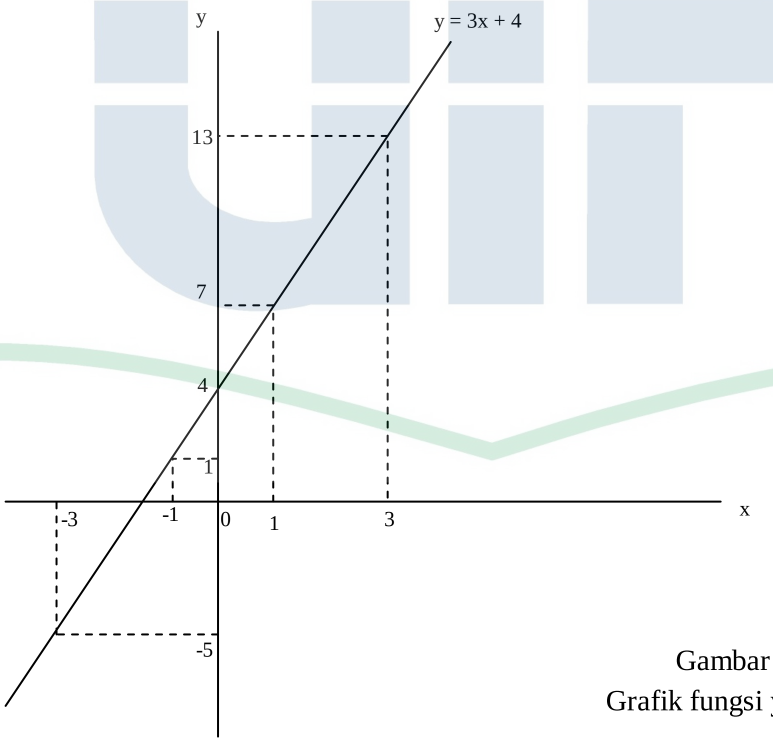
*contoh*:

y = 3x + 4

Dengan menggunakan tabel, dimana nilai x dimasukkan sebagai variabel bebas. Maka akan dapat diperoleh besaran nilai y sebagai variabel terikat. Sumbu x sebagai sumbu horizontal dan sumbu y sebagai sumbu vertikal.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | -5 | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |

Cara penggambaran dengan menggunakan tabel x dan y ini disebut *curve traicing process*. Bentuk gambarnya merupakan garis lurus.




Gambar 3.3.
Grafik fungsi y = 3x + 4

Fungsi linear sering kali digunakan dalam menyelesaikan persoalan ekonomi, hal ini lebih disebabkan karena permasalahan dalam *Ekonomi dan Bisnis* sering kali disederhanakan menjadi model-model yang bersifat linear.

Secara umum fungsi linear ini ditulis dalam bentuk:

Ax + By + C = 0

By = -Ax – C

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A} \rightarrow$ jika $a = \frac{A}{B}$ dan $b = \frac{C}{A}$ , maka :

y = -ax – b

di mana:

a : koefisien arah dari fungsi (*gradient*)

b : *intercept*

keterangan:

- Untuk memudahkan penyelesaian dalam persoalan yang diketahui, biasanya model persamaan di atas ditulis dalam bentuk y = ax + b
- Tanda ± pada koefisien arah, menunjukkan kecenderungan arah fungsi condong ke kiri atau ke kanan.

Contoh:

- 2x – 4y + 12 = 0, gradient-nya adalah $\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, yang mempunyai titik potong dengan sumbu x dan sumbu y pada (-6, -3)
- -5x + 3y – 10 = 0, fungsi eksplisitnya menjadi y = $-\frac{3}{5}x + 10$, maka gradient dari fungsi tersebut adalah $-\frac{3}{5}$, titik potong pada sumbu x dan y $\rightarrow$ $\left(16\frac{2}{3}, 10\right)$

Grafik fungsi linear berbentuk sebuah garis lurus, jika diketahui dua buah titik yang berkordinat di ($x_1$, $y_1$) dan ($x_2$, $y_2$), maka untuk menentukan model fungsi tersebut, dirumuskan seperti berikut:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

*Contoh*:

Jika diketahui dua buah titik, yaitu titik A (3, 7) dan titik B (12,6), maka tentukan bentuk fungsi linearnya?

Jawab:

$\frac{y-7}{x-3} = \frac{6-7}{12-3}$

$\frac{y-7}{x-3} = \frac{-1}{9}$ → 9(y – 7) = -1(x – 3)

9y – 63 = -x + 3

9y = -x + 63

y = $-\frac{1}{9}x + 7$

Untuk menentukan persamaan garis linear dapat pula dicari dengan menggunakan pola arah kemiringan (*gradient*). Jika *gradient* dinyatakan dengan m, di mana m adalah $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , maka selanjutnya persamaan: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dapat dituliskan $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Atau:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

Contoh:

Jika diketahui m = 2/3 dan titik koordinat A (5, 6), maka tentuka bentuk persamaan garis dan grafik fungsinya.

Jawab:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

y – 6 = 2/3(x – 5)

y = 2/3x - $3\frac{1}{3}$ + 6

y = 0,67x + $2\frac{2}{3}$

## 2. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi nonlinear (garis tidak lurus) yang variabel bebasnya berpangkat dua. Grafik fungsi kuadrat ini, apabila digambarkan, merupakan garis tidak lurus yang berbentuk parabola.

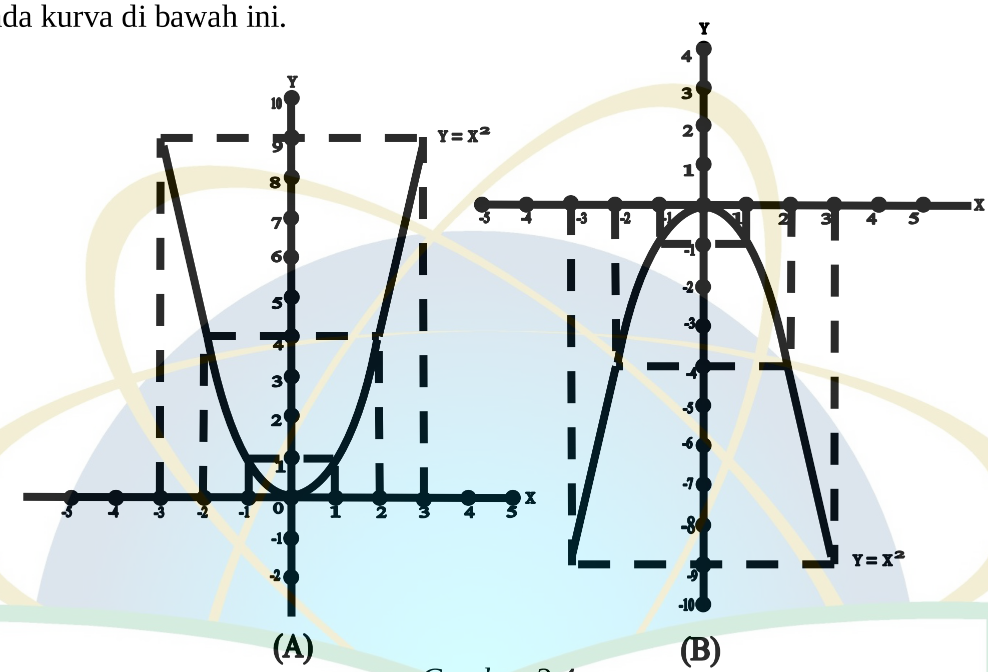
Bentuk umum fungsi kuadrat ini adalah sebagai berikut.

1. Dalam bentuk y = f (x) yaitu $y = a\,x^2 + bx + c$
   di mana a, b dan c adalah konstanta.
   x adalah variabel bebas (*independent variable*).
   y adalah variabel tidak bebas/ yang dipengaruhi.
2. Dalam bentuk x = f (y) yaitu: $x = ay^2 + by + c$
   di mana a, b, dan c adalah konstanta.

y adalah variabel bebas (*independent variable*)

x adalah variabel tidak bebas/yang dipengaruhi.

Fungsi kuadrat, mempunyai model kurva lengkung (parabola), seperti terlihat pada kurva di bawah ini.




*Gambar 3.4.*
*Kurva parabola*

Gambar 3.4. menunjukkan kurva lengkung yang terbuka ke atas dan kurva lengkung yang terbuka ke bawah. Suatu kurva parabola mempunyai satu titik puncak (*vertex*). Titik puncak (*vertex*) adalah titik yang menunjukkan perubahan gerak dari suatu fungsi titik puncak ini juga dikatakan sebagai titik tertinggi untuk kurva terbuka ke bawah dan/atau titik terendah untuk kurva terbuka ke atas (titik ekstrem).

Koordinat titik puncak dari suatu kurva parabola, dinyatakan dengan formulasi: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

Keterangan:

D = ($b^2$ – 4ac)

(a, b, dan c) = konstanta dari persamaan kuadrat

Untuk y = 0, persamaan y = $ax^2 + bx + c$, fungsi akan memotong sumbu x, adapun untuk menentukan titik potong dengan sumbu x tersebut, selanjutnya persamaan akan menjadi: $ax^2 + bx + c + 0$. Dengan nilai-nilai $x_1$ dan $x_2$, ditentukan seperti berikut:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*Contoh*:

Jika diketahui, f(x) = $x^2 - 6x + 4$, maka tentukan titik puncak fungsi tersebut:

Jawab:

Titik puncak (TP) = $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

Dari fungsi f(x) = $x^2 - 6x + 4$

Titik potong dengan sumbu y → x = 0, maka y = f(x) = 4

Titik potong dengan sumbu x → y = 0

$x^2 - 6x + 4 = 0$ dari fungsi implisit ini dapat diketahui nilai a = 1; b = -6, dan c =4, maka:

D = $(b^2 - 4ac) = \{(-6)^2 - 4\,(1)(4)\} = 20$

$$TP = \left(-\frac{(-6)}{2(1)}, \frac{-(20)}{4(1)}\right) = (3, -5)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{20}}{2(1)}$$

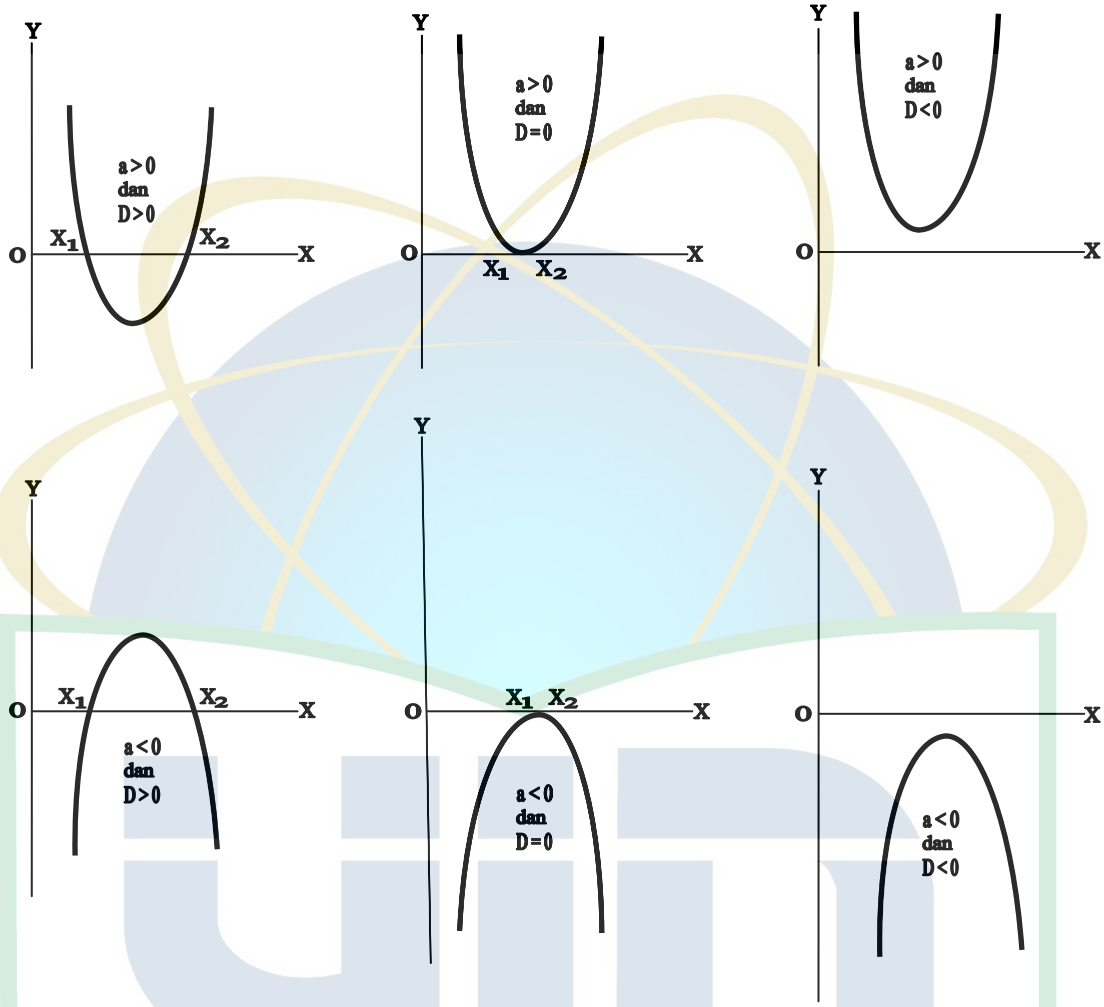
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4{,}47}{2}$$

$x_1 = 5{,}24$; dan $x_2 = 0{,}76$

Bentuk kurva parabola dapat diperhatikan dari nilai a dan nilai diskriminasi D, ada 6 macam bentuk kurva parabola antara lain:

1. Jika a > 0 dan D > 0, maka kurva parabola akan terbuka ke atas dan memotong sumbu x pada dua titik yang berlainan.
2. Jika a > 0 dan D = 0, maka kurva parabola akan terbuka ke atas dan menyinggung sumbu x pada dua titik yang berimpit.
3. Jika a > 0 dan D < 0, maka kurva parabola akan terbuka ke atas dan tidak memotong sumbu x di mana pun.
4. Jika a < 0 dan D > 0, maka kurva parabola akan terbuka ke bawah dan memotong sumbu x pada dua titik yang berlainan.

5. Jika a < 0 dan D = 0, maka kurva parabola akan terbuka ke bawah dan menyinggung sumbu x pada dua titik yang berimpit.
6. Jika a < 0 dan D < 0, maka kurva parabola akan terbuka ke bawah dan tidak memotong sumbu x di mana pun:




*Gambar 3.5.*

*Berbagai bentuk kurva parabola*

Keterangan:

- Nilai parameter a untuk menyatakan kurva parabola terbuka ke arah mana ( atas atau bawah), jika a positif kurva terbuka ke atas dan jika a negatif kurva terbuka ke bawah.
- Nilai diskriminan (D), untuk menyatakan kurva parabola memotong atau tidak terhadap sumbu x, jika D > 0 memotong pada dua titik, jika D = 0 menyinggung sumbu x dan jika D < 0 tidak memotong sumbu x.

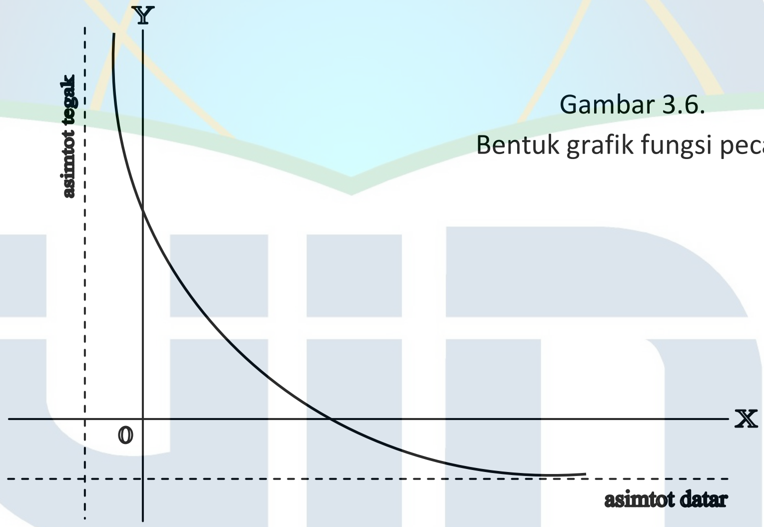
### 3. Fungsi Pecah

Suatu fungsi nonlinear (garis tidak lurus) yang variabel bebasnya merupakan penyebut disebut dengan fungsi pecah. Grafik fungsi kuadrat ini, apabila digambarkan, merupakan garis tidak lurus yang berbentuk hiperbola. Bentuk umum fungsi pecah bentuk y = f (x):

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

di mana: a, b, c dan d adalah konstanta;
x adalah variabel bebas (*independent variable*);
y adalah variabel tidak bebas (*dependent variable*).

Kurva dari fungsi rasional ini berbentuk hiperbola yang memiliki sumbu *asimtot* (asimtot datar dan asimtot tegak). Sumbu asimtot adalah merupakan sumbu yang didekati oleh kurva, tetapi tidak pernah menyinggung sampai batas tak terhingga.




Gambar 3.6.
Bentuk grafik fungsi pecah

Untuk penggambaran grafik fungsi pecah seperti ini perlu diketahui ciri-ciri matematis yang penting dari fungsi pecah. Setelah mengetahui ciri-ciri matematisnya, penggambarannya membutuhkan bantuan tabel x dan y yang disebut *curve tracing process.* Ada beberapa ciri matematis yang penting dari fungsi pecah dalam bentuk umum seperti di atas. Berikut ini ciri matematis fungsi pecah.

a. Titik potong fungsi pecah dengan sumbu y adalah pada

$\mathrm{x} = 0, \text{maka } \mathrm{y} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}.$

$\text{Jadi, titiknya P } (\,0; \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}})$

b. Titik potong fungsi pecah dengan sumbu x pada

$\mathrm{y} = 0, \text{maka } 0 = \frac{\mathrm{ax + b}}{\mathrm{xc + d}}$

$\mathrm{ax + b = 0}$

$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$

Jadi, titik potongnya Q $\left(\frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\,; 0\right)$.

c. Ciri yang penting dalam fungsi pecah adalah asimtot. Asimtot suatu garis lengkung adalah garis yang tidak dilalui dipotong oleh garis lengkung tersebut, tetapi didekati sampai pada titik tidak tidak terhingga untuk x dan y. Dalam hal fungsi pecah seperti ini, dikenal adanya asimtot datar dan asimtot tegak. Asimtot datar adalah suatu garis lurus yang sejajar atau berimpit dengan sumbu x, yang tidak akan dipotong. Akan tetapi, asimtot ini didekati oleh fungsi pecah sampai pada titik di mana nilai x adalah ~. Jadi, persamaan garis asimtot datar adalah bila x = ~, maka

$$y = \frac{\mathrm{ax + b}}{\mathrm{cx + d}}$$

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{a} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}}{\mathrm{c} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{x}}}$$

Suatu bilangan dibagi dengan $\sim$ yaitu $\frac{\mathrm{b}}{\sim}$ atau $\frac{\mathrm{d}}{\sim} = 0$

Sehingga: $y = \frac{\mathrm{a+0}}{\mathrm{c+0}} \rightarrow \mathrm{y} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$

d. Asimtot tegak adalah suatu garis lurus yang sejajar atau berimpit dengan sumbu y yang tidak akan terpotong. Akan tetapi, asimtot ini didekati oleh fungsi pecah sampai pada titik nilai y adalah titik terhingga ( ~ ) positif atau negatif. Jadi, persamaan garis asimtot tegak adalah bila y = ~, maka:

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{ax\ +\ b}}{\mathrm{cx\ +\ d}} \rightarrow \sim = \frac{\mathrm{ax\ +\ b}}{\mathrm{cx\ +\ d}}$$

$$\mathrm{cx} + \mathrm{d} = \frac{\mathrm{ax} + \mathrm{b}}{\sim}$$

$$\mathrm{cx} + \mathrm{d} = 0$$

$$\mathrm{cx} = -\mathrm{d}$$

$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$$

sehingga persamaan garis asimtot tegak adalah $\mathrm{x} = -\frac{d}{c}$

*Contoh :*

Apabila fungsi $y = \frac{2x+3}{x+1}$

Maka grafik fungsi pecah ini dapat digambarkan dengan memperhatikan ciri-ciri matematis yang penting dengan bantuan tabel x dan y. Adapun ciri-ciri matematis yang penting dari fungsi pecah ini adalah sebagai berikut:

a. Titik potong fungsi pecah dengan sumbu y adalah pada x = 0, maka y = 3. Jadi titiknya P (0, 3)

b. Titik potong fungsi pecah dengan sumbu x adalah pada kondisi y = 0, maka 0 = 2x + 3, sehingga x = $-1\frac{1}{2}$. Jadi titiknya Q $(-1\frac{1}{2}, 0)$

c. Asimtot tegak adalah bila y = ~, maka $\frac{2x+3}{x+1} =$

$$x + 1 = \frac{2x + 3}{\sim} \rightarrow x + 1 = 0, sehingga\ x = -1$$

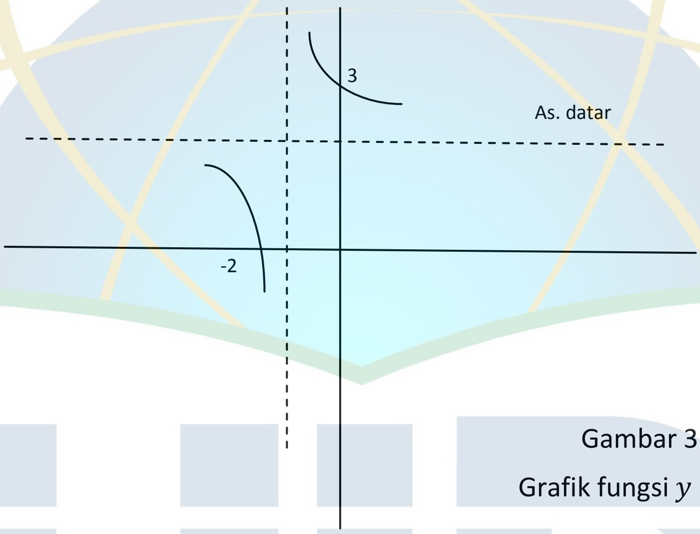
Asimtot datar adalah jika x = ~, maka $y = \frac{2+3/x}{1+1/x}$ → y = 2

Jadi persamaan garis asimtot datar adalah y = 2

Dengan menggunakan ciri-ciri ini, maka dapat digambarkan grafik fungsi pecah $y = \frac{2x+3}{x+1}$ dengan bantuan tabel x dan y berikut

| x | y |
|---|---|
| -1 | + ~ |
| 0 | 3 |
| 1 | $2\,{}^{1}/_{2}$ |
| 2 | $2\,{}^{1}/_{3}$ |
| 5 | $2\,{}^{1}/_{6}$ |
| + ~ | 2 |

| x | y |
|---|---|
| -1 | $-\sim$ |
| $-1\,{}^{1}/_{2}$ | 0 |
| -2 | 1 |
| -3 | $1\,{}^{1}/_{2}$ |
| -4 | $1\,{}^{2}/_{3}$ |
| -5 | $1\,{}^{3}/_{4}$ |
| $-\sim$ | 2 |




Gambar 3.7.
Grafik fungsi $y = \frac{2x+3}{x+1}$

## 4. Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang yang mempunyai jarak tertentu dari titik pangkalnya (titik pusat), adapun jarak tersebut dikatakan sebagai jari-jari lingkaran.

Bentuk umum suatu lingkaran, dinyatakan dengan persamaan:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Di mana:

A dan B tidak sama dengan 0 (nol)

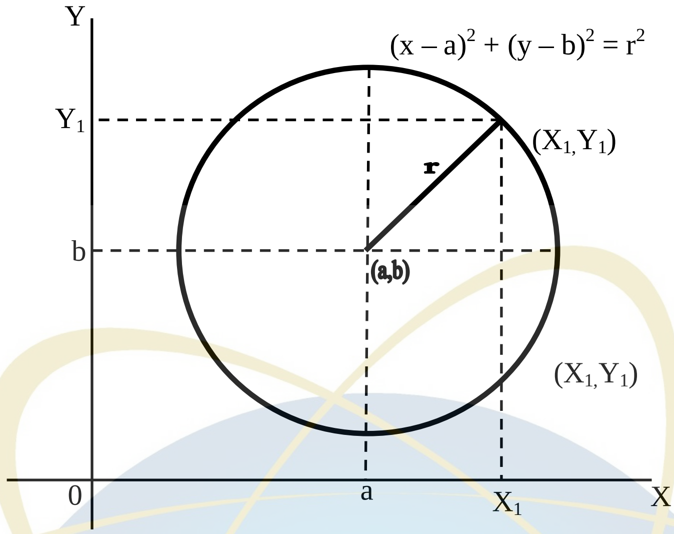
A dan B bertanda sama (positif dan/atau negatif)

Persamaan lingkaran dalam bentuk standar ditulis: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Di mana: A dan b : Pusat lingkaran

r : Jari-jari lingkaran

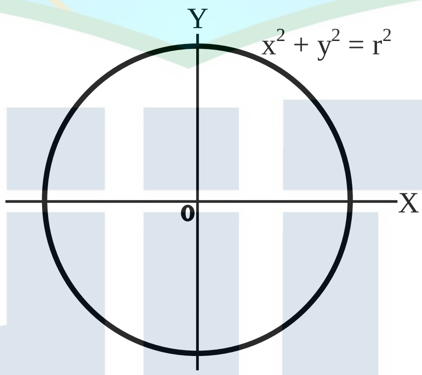
.




*Gambar 3.8*
*Lingkaran*

Jika titik pusat berada pada koordinat (0, 0), maka persamaan lingkaran dinyatakan:

$x^2 + y^2 = r^2$




*Gambar 3.9.*
*Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$*

## 5. Elips

Elips adalah merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang dengan jumlah jarak dari dua titiknya konstan. Suatu elips mempunyai dua sumbu saling tegak, pertemuan kedua sumbu tersebut dikatakan sebagai titik pusat elips (sumbu panjang dan sumbu pendek), sumbu panjang disebut sumbu utama sedangkan sumbu pendek disebut sebagai sumbu minor. Bentuk umum dari elips:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

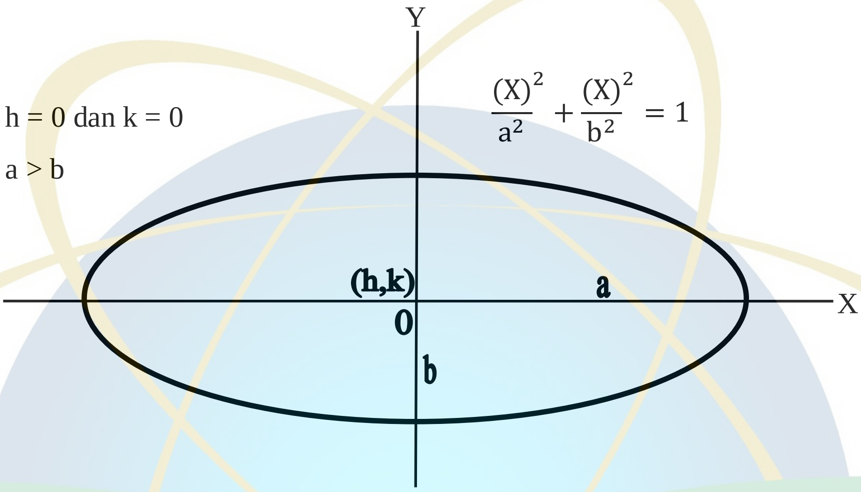
Dimana:

A ≠ B, A dan B mempunyai tanda yang sama

Bentuk umum standar:

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 \left(\frac{x-k}{b}\right)^2 = 1$$

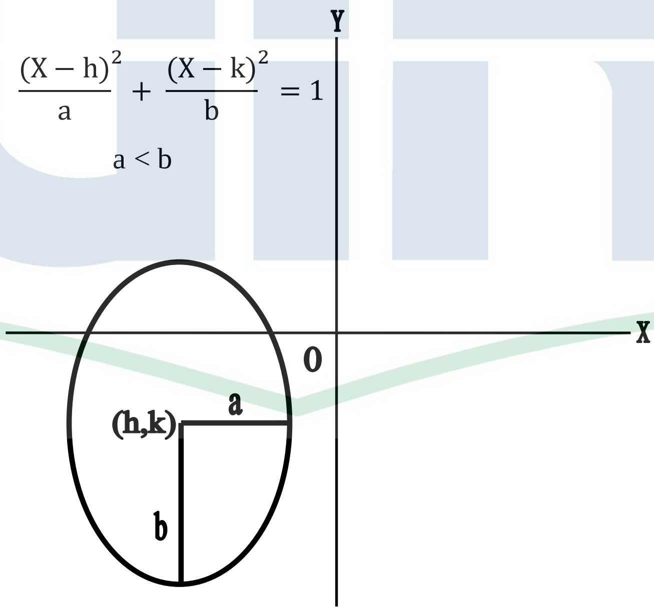
- Jika a (sumbu utama) > b (sumbu minor), maka posisi elips sejajar dengan sumbu x




*Gambar 3.10*

*Elips sejajar dengan sumbu x*

- Jika a (sumbu utama) < dari b (sumbu minor), maka posisi elips sejajar dengan sumbu y




*Gambar 3.11.*

*Elips sejajar dengan sumbu y*

## C. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi yang variabel x-nya merupakan bilangan pangkat dari suatu konstanta. Sebagai contoh adalah fungsi: $y = a^x$, di mana x dan y merupakan variabel dan a merupakan konstanta. Dalam hal fungsi eksponensial ini, perlu diperhatikan hukum-hukum eksponensial yang penting, yaitu:

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
3. $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$
4. $a^m \, a^n = a^{m-n}$
5. $(a^m)^k = a^{mk}$.

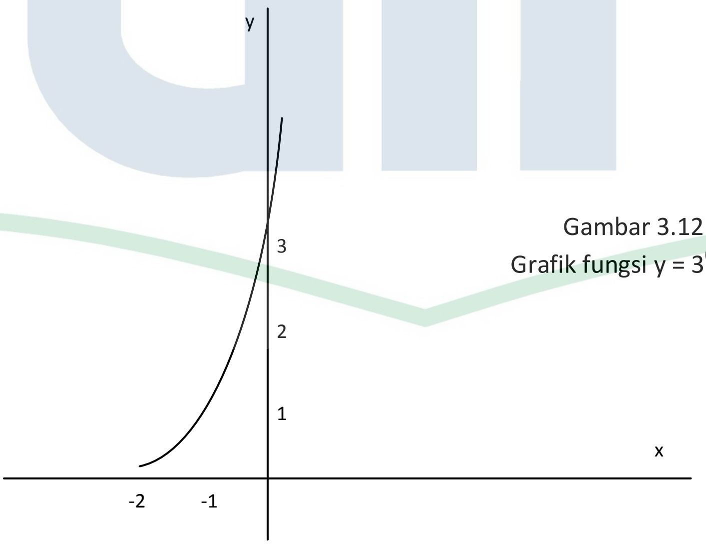
Dengan cara sederhana yang menggunakan tabel x dan y, maka penggambaran grafik fungsi atau kurva $y = a^x$ tidak sulit, terutama untuk menyusun atau menentukan titik-titiknya. Jika a > 1, kurva akan melalui titik (0, 1) dan akan bertambah secara teratur. Selain itu, jika x → - ~ , maka y = → 0

*Contoh:*

Apabila diketahui suatu fungsi $y = 3^{(2x + 1)}$, maka gambarkanlah grafiknya

Jawab:

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1/243 | 1/27 | 1/3 | 3 | 27 | 243 | 2187 | 19683 |




Gambar 3.12
Grafik fungsi $y = 3^{(2x + 1)}$

## D. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah suatu fungsi nonlinear (garis tidak lurus). Dalam hal ini variabel bebas (*independent variable*)nya dalam bentuk logaritma, seperti y = a atau log y = a + b log x.

Fungsi logaritma juga merupakan fungsi kebalikan dari fungsi eksponensial, seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa fungsi eksponensial ditulis: $y = a^x$, (a: konstanta dan x variabel), jika fungsi tersebut dikalikan dengan *log*, maka fungsi logaritma dapat dikatakan sebagai fungsi kebalikan dari fungsi eksponensialnya.

Sebagai gambaran untuk bilangan logaritma, dinyatakan sebagai berikut:

- untuk bilangan dasar 10
  $y = {}^{10}\log x$ (biasa ditulis log x saja)
- untuk bilangan dasar e (2,7183), ditulis:
  $y = {}^{e}\log x$ atau y = inx (logaritma natural)

**Aturan Logaritma**

Secara umum aturan logaritma dinyatakan sebagai berikut:

1. ${}^{10}\log xy = {}^{10}\log x + {}^{10}\log y$
2. ${}^{10}\log \frac{x}{y} = {}^{10}\log x - {}^{10}\log y$
3. ${}^{10}\log x^y = y\ {}^{10}\log x$

Selanjutnya, pernyataan *${}^{10}$log dituliskan log* saja, seperti pada contoh berikut:

- log (x + 2) (12, -3) = log(5x + 2) + log (12x -3)
- $\log \frac{(5x + 2)}{(12x - 3)} = \log (5x + 2) - \log (12x - 3)$
- $\log (5x + 2)^{(12x -3)} = (12x - 3) \log (5x + 2)$

Untuk bilangan dasar e (2,7183), ditulis dalam bentuk *'log* (logaritma natural) yang selanjutnya simbol untuk logaritma natural ini dituliskan *"In"*, seperti pada contoh berikut.

4. ${}^{e}\log (5x + 2)(12x - 3) = {}^{e}\log (5x + 2) + {}^{e}\log (12x -3)$
   Fungsi di atas dapat dituliskan dalam bentuk:
   In (5x + 2) (12x – 3) = In (5x + 2) + In (12x – 3)
5. ${}^{e}\log \frac{(5x + 2)}{(12x - 3)} = {}^{e}\log (5x + 2) - {}^{e}\log (12x - 3)$

fungsi di atas daapt dituliskan dalam bentuk:

In $\frac{(5x\ +\ 2)}{(12x\ -\ 3)}$ = In (5x + 2) – In (12x – 3)

6. $^{e}\log (5x + 2)^{(12x-3)} = (12x - 3)\ ^{e}\log (5x + 2)$

Fungsi di atas dapat dituliskan dalam bentuk :

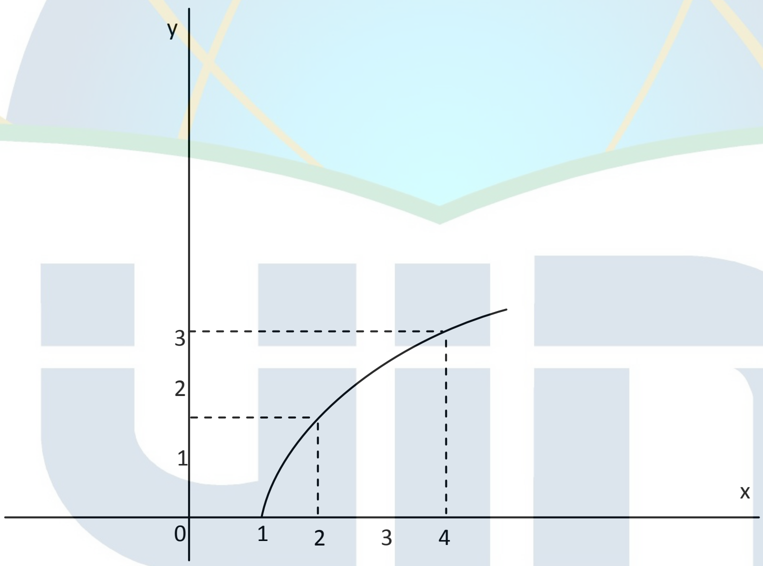
In $(5x + 2)^{(12x-3)}$ = (12x – 3) In (5x + 2)

Dengan cara sederhana dengan menggunakan tabel x dan y dapat digambarkan grafik fungsi logaritma.

*Contoh:*

Apabila diketahui fungsi y = 5 log x

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 1,51 | 2,39 | 3,01 | 3,49 | 3,89 | 5 |




Gambar 3.13.
Grafik fungsi y = 5 log x

## E. Perpotongan antara Dua Buah Fungsi

Dua buah fungsi dikatakan berpotongan apabila kedua buah fungsi tersebut mempunyai sebuah titik persekutuan yang disebut titik potong. Titik potong antara kedua buah fungsi diperoleh dengan mempersamakan kedua buah fungsi itu.

*Contoh :*

Carilah titik potong fungsi-fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2

Jawab:

Titik potong antara kedua buah fungsi ini dapat diperoleh dengan mempersamakan kedua buah fungsi tersebut, yaitu:

$y = 10 - 2x$

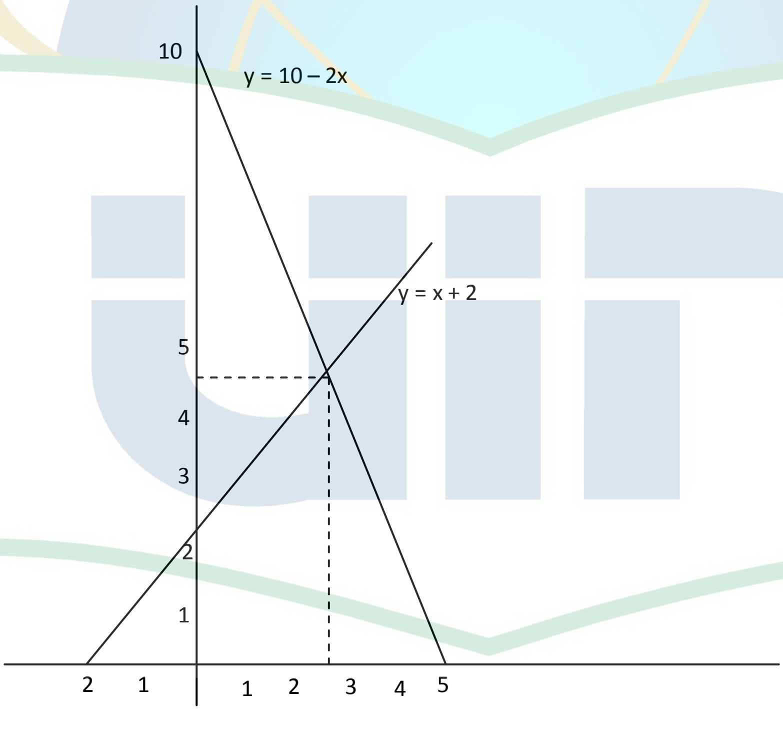
$y = x + 2$

$10 - 2x = x + 2$

$3x = 8$

$x = 2\frac{2}{3}$ dan $y = 4\frac{2}{3}$

Jadi titik potong fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2 adalah titik $(2\frac{2}{3}; 4\frac{2}{3})$. Grafik fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2 serta titik potongnya dapat dilihat pada gambar 3.14 berikut:




Gambar 3. 14

Grafik fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2

# BAB 5
# APLIKASI FUNGSI DALAM EKONOMI

Terdapat beberapa kegunaan fungsi dalam analisis ekonomi. penerapan aplikasi fungsi dalam ekonomi yang paling pokok adalah dalam analisis permintaan, analisis, penawaran, titik keseimbangan pasar dan pengaruh perpajakan, dan subsidi terhadap keseimbangan pasar.

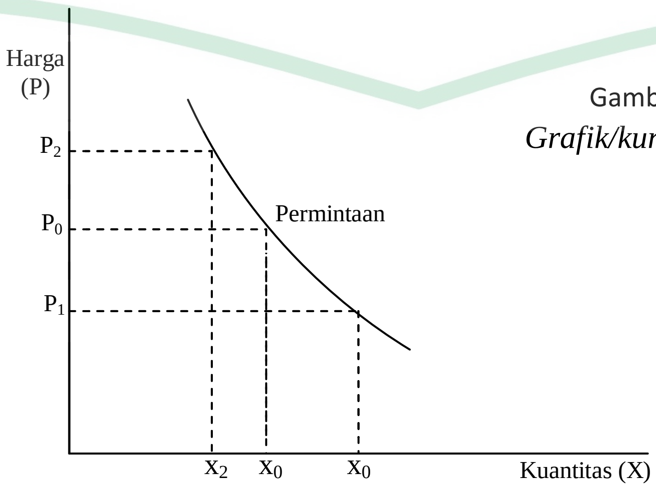
## A. Fungsi Linear

### 1. Permintaan, Penawaran dan Keseimbangan Pasar

**Permintaan**

Permintaan adalah berbagai jumlah barang yang diminta pada berbagai tingkat harga. Dalam hukum permintaan kita melihat bahwa besar kecilnya jumlah barang yang diminta sangat bergantung pada tingkat harga barang tersebut. Apabila keadaan lainnya tetap (*ceteris paribus*) dengan tingkat pendapatan yang tetap, jika harga barang naik, jumlah sudut barang pun naik. Maka, jumlah yang diminta akan berkurang. Sebaliknya, jika harga diri barang itu turun, jumlah diminta akan bertambah.

Hal ini dapat dilihat pada Gambar 5.1. dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa bila harga suatu barang turun dari $P_0$ ke $P_1$, jumlah yang diminta akan bertambah dari $x_0$ ke $x_1$. Demikian pula apabila harga naik dari $P_0$ ke $P_2$, jumlah yang diminta akan berkurang yaitu dari $x_0$ ke $x_2$. Besarnya pertambahan atau penurunan dari jumlah yang diminta dari suatu barang tertentu sebagai akibat pengaruh turunnya atau naiknya harga barang. Hal itu sangat tergantung pada elastisitas permintaan barang.




Gambar 5.1.
*Grafik/kurva Permintaan*

Dari uraian di atas terlihat bahwa terdapat suatu pola hubungan variabel kuantitas atau jumlah yang diminta dari suatu barang dengan variabel harga barang tersebut. Apabila pola hubungan tersebut digambarkan, akan terlihat suatu grafik yang sering disebut kurva permintaan, seperti dapat dilihat pada *Gambar 5.1. Hubungan antara variabel kuantitas dan variabel harga* tersebut dapat dinyatakan dalam suatu formula yang disebut fungsi permintaan. Fungsi permintaan merupakan hubungan antara variabel yang menentukan/ mempengaruhi jumlah yang diminta. Hal itu berupa harga (disebut *independent variable*) dengan variabel jumlah yang diminta (disebut *dependent variable*). Hubungan kedua variabel itu dinyatakan sebagai x adalah fungsi p atau $x = f(p)$ di mana x adalah variabel kuantitas/jumlah dan p adalah variabel harga.

Dalam fungsi permintaan, variabel yang menentukan *independent variable*) tidak selamanya satu yaitu harga barang tersebut. Akan tetapi, dapat lebih dari satu, yaitu di samping harga barang. Ada juga harga dan jumlah barang-barang substitusi. Hubungan variabel-variabel tersebut dinyatakan sebagai $x_1 = f(x_2, x_3, x_6 ..)$ di mana $x_1$ adalah variabel kuantitas/jumlah barang yang diminta dan $x_2$ adalah variabel harga barang tersebut $x_3$ adalah kuantitas/jumlah barang substitusi yang diminta, $x_4$ adalah harga barang substitusi harga barang tersebut, dan demikian seterusnya. Permasalahan ini merupakan permasalahan lanjutan dari matematika ekonomi yang dikenal denga ekonometri.

Pola hubungan variabel jumlah yang diminta dengan variabel harga, dapat berbentuk garis lurus yaitu fungsi linear. Selain itu, dapat juga berbentuk garis tidak lurus, yaitu fungsi nonlinear, antara lain fungsi kuadrat, fungsi pecah, dan fungsi eksponensial.

Kurva permintaan (*demand curve)* menyatakan seberapa banyak kuantitas barang atau produk yang bersedia dibeli oleh konsumen dikarenakan perubahan harga per unit. Dalam hal ini kuantitas permintaan terhadap suatu barang dipengaruhi oleh tingkat harga yang ditetapkan. Dapat dituliskan hubungan antara jumlah permintaan dengan harga ini sebagai suatu persamaan:

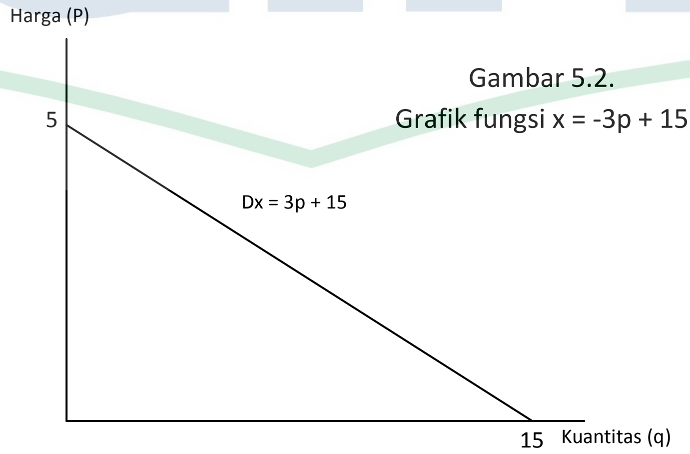
Qd = f(P)………………………………….(5.1)

Perhatikanlah bahwa kurva permintaan yang ditandai dengan D, kemiringannya menurun. Kenapa hal ini terjadi. Slope yang menurun disebabkan prilaku rasional dari seorang konsumen, yaitu apabila harga naik mereka akan menurunkan konsumsinya, begitu pula sebaliknya bila harga turun mereka akan menaikkan konsumsinya. Dimana satu-satunya faktor yang menyebabkan perubahan tingkat kuantitas atas suatu produk hanya dipengaruhi oleh perubahan tingkat harga. Hal inilah dalam ilmu ekonomi yang dikenal sebagai pergerakan sepanjang kurva (*moving along the curve)*, dimana perubahan konsumsi hanya terjadi di sepanjang kurva permintaan tersebut dan tidak terjadi pergeseran dalam kurva permintaan.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa pergerakan kurva permintaan hanya terjadi oleh perubahan atas harga itu sendiri. Apabila harga barang tersebut naik, maka kurva permintaannya dapat bergerak menurun, begitu pula sebaliknya apabila harga barang tersebut turun.

kurva permintaan mempunyai ketentuan bahwa pada suatu tingkat harga (p) hanya terkandung satu nilai kuantitas/jumlah (x), atau sebaliknya. Pada suatu kurva permintaan garis lurus (linear), tingkat pertambahan kuantitas/jumlah diakibatkan oleh turunnya harga. Dalam hal ini sama dengan yang dinyatakan dalam bentuk umum fungsi: x = ap + b di mana x adalah variabel kuantitas, p adalah variabel harga, sedangkan a dan b adalah konstanta.

Sebagai contoh, fungsi permintaan suatu barang adalah x = -3p + 15 di mana x merupakan variabel kuantitas barang dan p merupakan variabel harga barang tersebut. Kurva permintaan barang adalah seperti terlihat pada Gambar 6.2.




Gambar 5.2.
Grafik fungsi x = -3p + 15

**Penawaran**

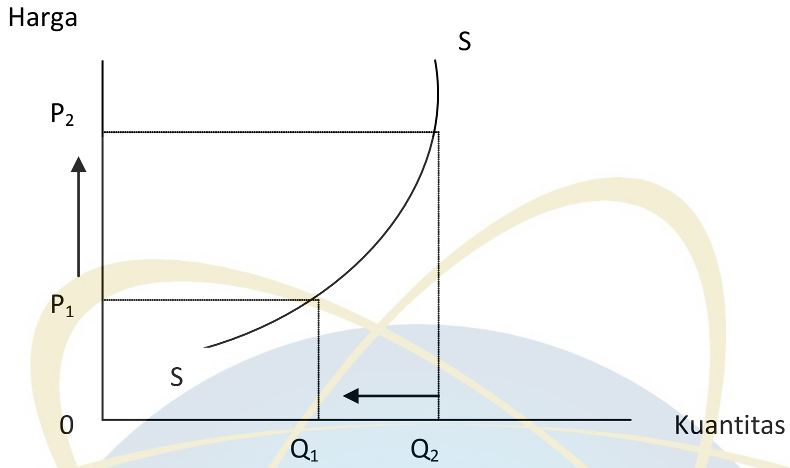
Penawaran adalah jumlah barang yang ditawarkan pada berbagai tingkat harga. Kurva penawaran suatu barang merupakan grafik yang menggambarkan pola hubungan antara jumlah yang ditawarkan dari barang tersebut pada berbagai tingkat harga. Kurva penawaran ini mempunyai persyaratan yaitu berlaku untuk variabel kuantitas/jumlah atau x dan variabel harga atau p yang positif. Di samping itu, kurva penawaran suatu barang mengikuti ketentuan-ketentuan yang berlaku dalam hukum penawaran. Dalam hukum penawaran terlihat bahwa besar kecilnya jumlah barang yang ditawarkan sangat tergantung pada tingkat harga barang tersebut. Dalam keadaan lain dapat saja tetap (*ceteris paribut)*. Maka, jika harga diri suatu barang naik, jumlah barang yang ditawarkan tersebut bertambah. Hal ini karena produsen berusaha untuk menggunakan kesempatan memperbesar keuntungannya. Sebaliknya, jika harga barang itu turun, jumlah yang ditawarkan akan berkurang karena produsen berusaha mengurangi kerugiannya.

Kurva penawaran (*supply curve*) menunjukkan jumlah barang yang bersedia dijual oleh para produsen pada harga yang akan diterimanya di pasar, sambil mempertahankan agar setiap faktor yang mempengaruhi jumlah penawaran itu tetap. Hal ini bisa ditulis dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$Qs = f(P) \qquad (5.2)$$

Dimana dalam persamaan tersebut terlihat hubungan antara jumlah penawaran dan harga. Hubungan ini dapat pula kita gambarkan dalam bentuk gambar, seperti pada gambar 5.3. Kurva penawaran mempunyai *slope* (kemiringan) yang positif, dimana hal ini berarti semakin tinggi harga maka semakin banyak barang yang ditawarkan oleh perusahaan ke pasar. Begitu pula sebaliknya bila terjadi penurunan harga maka semakin sedikit pula yang ditawarkan oleh perusahaan, sehingga hal ini seringkali memunculkan kenakalan produsen dimana agar terjadi kenaikan harga atas suatu produk jumlah produksi akan dikurangkan, sehingga dengan permintaan yang tetap sementara penawaran berkurang, maka harga dapat dinaikkan kembali . Hal inilah dalam ilmu ekonomi yang dikenal sebagai pergerakan sepanjang kurva (*moving along the curve)*.

Gambar 5.3.
Pergerakan Sepanjang Kurva (Moving along the curve)




Besarnya pertambahan atau penurunan jumlah barang yang ditawarkan, akibat dari pengaruh naik atau turunnya harga barang tersebut. Hal ini sangat tergantung dari elastisitas penawaran barang.

Dari uraian di atas terlihat bahwa terdapat suatu pola hubungan dari variabel kuantitas atau jumlah barang yang ditawarkan dengan variabel harga dari barang tersebut. Apabila pola hubungan tersebut dinyatakan dalam suatu formula, maka formula tersebut dinyatakan sebagai fungsi penawaran. Fungsi penawaran merupakan hubungan antara variabel yang menentukan/mempengaruhi jumlah yang ditawarkan yaitu harga (*independent variable)* dengan jumlah yang ditawarkan (*dependent variable*). Hubungan kedua variabel itu dinyatakan sebagai x adalah fungsi p atau $x = f(p)$ di mana x adalah variabel kuantitas/jumlah dan p adalah variabel harga.

Dalam fungsi penawaran, variabel yang menentukan (*independent variable)* tidak selamanya satu, yaitu harga barang tersebut, tetapi dapat lebih dari satu. Di samping harga barang ada juga biaya produksi barang tersebut dan jumlah bahan baku yang tersedia. Hubungan variabel-variabel tersebut dinyatakan sebagai $x_1 = f(x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots)$ dimana $x_1$ adalah variabel kuantitas/jumlah barang yang ditawarkan, $x_2$ adalah variabel harga barang tersebut, $x_3$ adalah biaya produksi barang, $x_4$ adalah kuantitas/jumlah bahan baku yang tersedia demikian seterusnya. Permasalahan ini merupakan permasalahan lanjutan dari matematika ekonomi, yang telah disebutkan terdahulu yaitu ekonometri. Hubungan kedua variabel antara kuantitas/jumlah yang ditawarkan dengan harga barang, dapat pula berbentuk sebagai p adalah fungsi x atau $p = f(x)$ di mana p variabel harga dan x adalah variabel kuantitas/jumlah barang yang ditawarkan.

**Keseimbangan Pasar**

Kedua kurva saling berpotongan pada jumlah dan harga keseimbangan (*equilibrium price)* atau "***market clearing price***". Pada harga ini ($P_0$ dalam gambar 5.4.), jumlah penawaran dan permintaan adalah sama (pada $Q_0$). Mekanisme pasar (*market mechanism)* adalah kecenderungan di pasar bebas sehingga terjadi perubahan harga sampai pasar menjadi seimbang (*equilibrium)* yakni sampai jumlah penawaran dan permintaan sama. Pada titik ini tidak ada kekurangan ataupun kelebihan penawaran, juga tidak ada tekanan terhadap harga untuk berubah lagi. Dimana masing-masing tingkat harga mampu bergerak sesuai dengan perubahan tingkat permintaan dan tingkat penawaran yang terjadi di pasar.

Untuk memahami mengapa pasar cenderung mengarah ke titik keseimbangan, misalkan pada awalnya harga berada di atas tingkat keseimbangan pasar, katakan $P_1$ pada gambar 5.4. Maka produsen akan berusaha memproduksi dan menjual lebih daripada yang bersedia dibeli konsumen. Karenanya akan terjadi surplus, yaitu jumlah penawaran lebih banyak dibandingkan jumlah permintaan. Untuk menjual surplus ini, produsen akan mulai menurunkan harga sampai dengan harga keseimbangan tercapai.

Hal yang sebaliknya akan terjadi jika harga mula-mula ada dibawah $P_0$, katakanlah $P_2$. Kekurangan akan terjadi karena jumlah permintaan melebihi jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen. Ini akan mengakibatkan tekanan ke atas terhadap harga karena sesama konsumen akan saling bersaing satu sama lain untuk mendapatkan penawaran yang ada, dan produsen merespons dengan menaikkan harga dan menambah barang, sehingga harga akhirnya akan mencapai harga keseimbangan $P_0$.

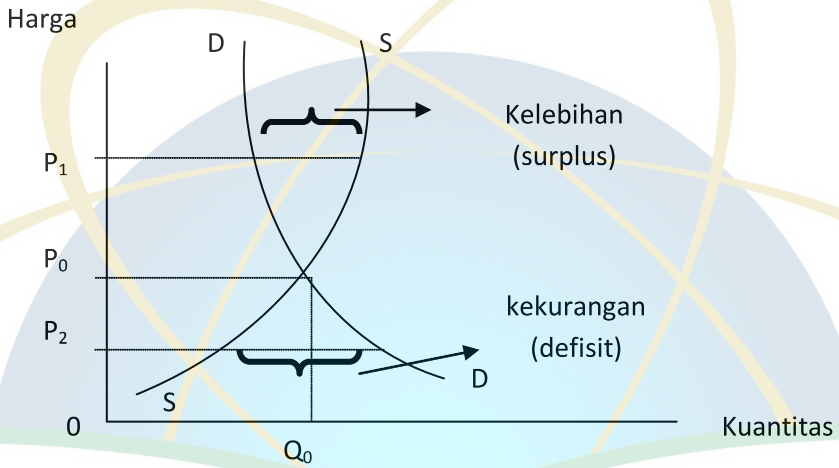
Dalam menentukan titik keseimbangan pasar suatu barang atau jasa, perlu diperhatikan syarat-syarat yang perlu dipenuhinya. Adapun syarat-syarat titik keseimbangan pasar adalah:

1. Titik keseimbangan pasar hanya berlaku untuk nilai-nilai yang positf.

2. Titik keseimbangan pasar hanya berlaku untuk titik yang memenuhi ketentuan bagi kurva permintaan dan kurva penawaran.

Atas dasar persyaratan ini, tidak mungkin terdapat dua titik keseimbangan pasar bagi suatu kurva permintaan dan kurva penawaran. Hal itu terjadi walaupun mungkin terdapat dua titik potong dari fungsi permintaan dan penawaran.

Gambar 5.4.
Mekanisme Pasar (*market mechanism)*



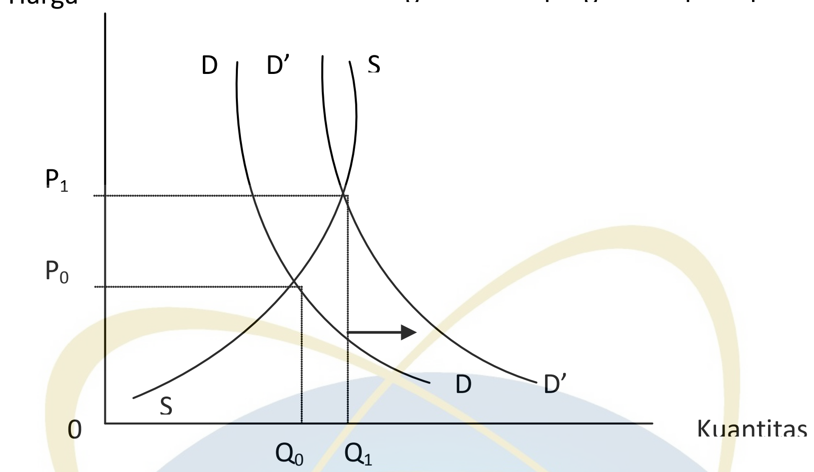

**Perubahan Keseimbangan Pasar**

Keseimbangan pasar dapat berubah karena tiga faktor berikut: (Al Arif, dan Amalia, 2010)

- **Pergeseran permintaan**

Keseimbangan dapat bergeser, bila terjadi perubahan terhadap kurva permintaan masyarakat. Contoh kasus dalam hal ini adalah pada saat hari raya Idul Adha permintaan terhadap hewan qurban meningkat. Ini menyebabkan kurva permintaan bergeser ke kanan, sementara kurva penawaran tetap, karena banyak masyarakat yang mencari hewan qurban untuk melaksanakan salah satu kewajibannya agamanya. Perubahan dalam kurva permintaan ini akan menyebabkan kenaikan harga hewan qurban di atas harga keseimbangan, sehingga tercipta suatu harga keseimbangan yang baru. Akan tetapi setelah Idul Adha biasanya harga hewan qurban akan kembali turun dan hal ini menyebabkan kurva permintaan bergeser kembali ke titik semula. Hal ini yang merupakan keseimbangan yang terjadi akibat oleh mekanisme pasar di masyarakat.

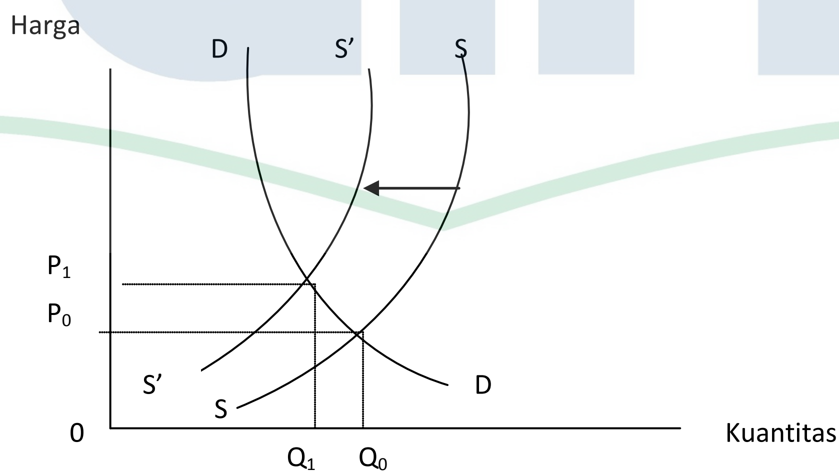
Gambar 5.5.
Perubahan keseimbangan karena pergeseran pada permintaan




➢ **Pergeseran penawaran**

Selain pergeseran permintaan, perubahan keseimbangan bisa pula terjadi akibat pergeseran penawaran. Misalkan pada saat krisis ekonomi yang melanda Indonesia, dimana industri property banyak berjatuhan akibat melambungnya harga bahan bangunan terutama semen. Pada saat tersebut, semen langka di pasaran, hal ini menyebabkan kenaikan harga semen. Meskipun permintaan akan semen tetap, namun karena biaya produksi semakin tinggi menyebabkan banyaknya industri properti yang jatuh. Sehingga kurva penawaran bergeser ke kiri, sedangkan kurva permintaan tetap, hal ini menyebabkan kenaikan harga, karena penawaran lebih sedikit dari pemintaan.

Gambar 5.6.
Perubahan keseimbangan karena pergeseran pada penawaran

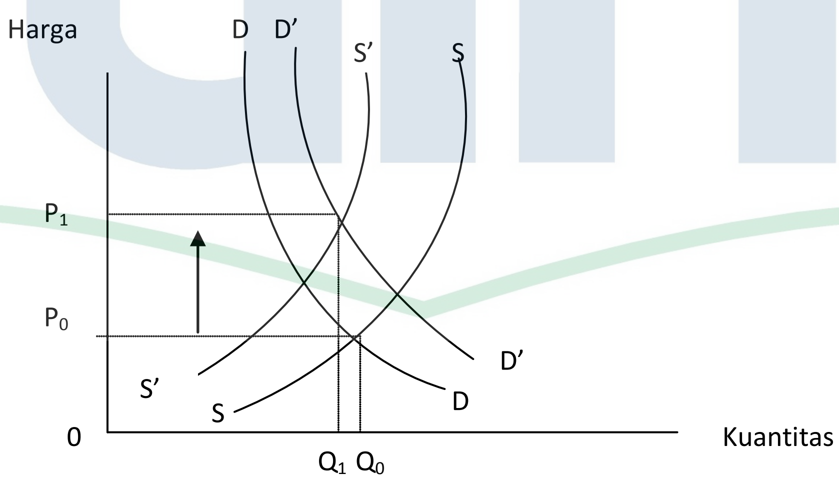


➢ **Pergeseran Permintaan dan Penawaran**

Pergeseran dapat pula terjadi secara simultan antara permintaan dan penawaran. Misalkan pada saat krisis ekonomi yang melanda Indonesia, dimana harga susu meningkat secara drastis. Apabila dianalisis secara seksama penyebab kenaikan harga ini dapat terjadi karena dua hal, *pertama*, karena pelemahan kurs rupiah pada saat itu menyebabkan kenaikan biaya produksi dikarenakan komposisi bahan baku impor yang tinggi, kenaikan biaya produksi ini menyebabkan pergeseran kurva penawaran ke arah kiri (kurva penawaran menurun).

*Kedua*, penyebab kenaikan harga kedua karena situasi dan kondisi yang tidak kondusif pada saat itu, menyebabkan sebagian besar masyarakat mengambil keputusan untuk melakukan penimbunan barang sebagai upaya antisipatif kelangkaan barang, keputusan untuk menimbun barang ini menyebabkan kenaikan kurva permintaan secara drastis (kurva permintaan meningkat), atau kurva permintaan bergeser ke kanan atas. Pergeseran kurva penawaran ke kiri dan kurva penawaran ke kanan, menyebabkan kenaikan harga susu secara drastis pada saat krisis ekonomi yang melanda Indonesia pada tahun 1997/1998.

Gambar 5.7.
Perubahan keseimbangan karena pergeseran pada penawaran dan permintaan



*Contoh*

- Apabila diketahui fungsi permintaan akan suatu barang ialah P = 15 – Q, dan fungsi penawarannya adalah P = 3 + 0,5Q. Hitunglah berapa harga dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar?

Jawab:

Keseimbangan pasar tercipta pada kondisi permintaan = penawaran

$P = 15 - Q \rightarrow Q_d = 15 - P$

$P = 3 + 0{,}5Q \rightarrow Q_s = -6 + 2P$

$Q_d = Q_s$

$15 - P = -6 + 2P$

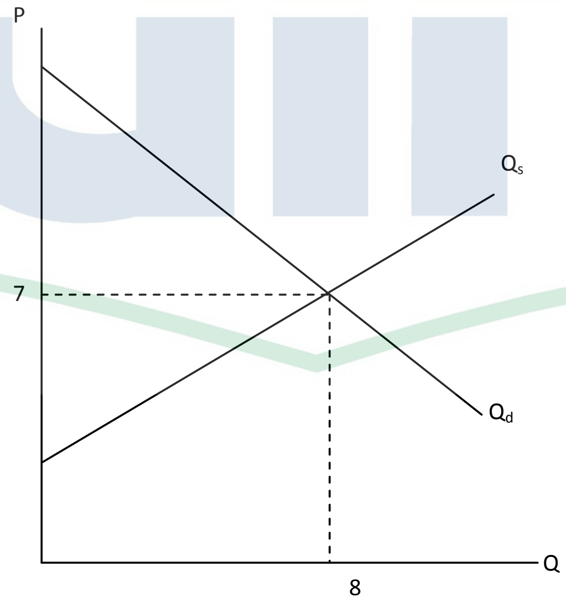
$21 = 3P$

$P = 7$

Setelah didapatkan harga keseimbangan di pasar ialah Rp 7, selanjutnya ialah memasukkan nilai tersebut kepada salah satu fungsi.

| | |
|---|---|
| $Q_d = 15 - P$ | $Q_s = -6 + 2P$ |
| $Q_d = 15 - 7$ | $Q_s = -6 + 2(7)$ |
| $Q_d = 8$ | $Q_s = 8$ |

Maka keseimbangan pasar tercipta pada harga keseimbangan 7 dan kuantitas keseimbangan sebesar 8 unit




Gambar 5.8.
Grafik fungsi P = 15 – Q dan P = 3 + 0,5Q

- Jika diketahui fungsi permintaan dan penawaran barang adalah

  $P_d = 100 - 20Q$; $P_s = 40 + 10Q$,

  Maka tentukan berapa besarnya harga dan kuantitas keseimbangan?

Jawab:

Keseimbangan pasar tercipta pada kondisi permintaan = penawaran

$P_d = 100 - 20Q$

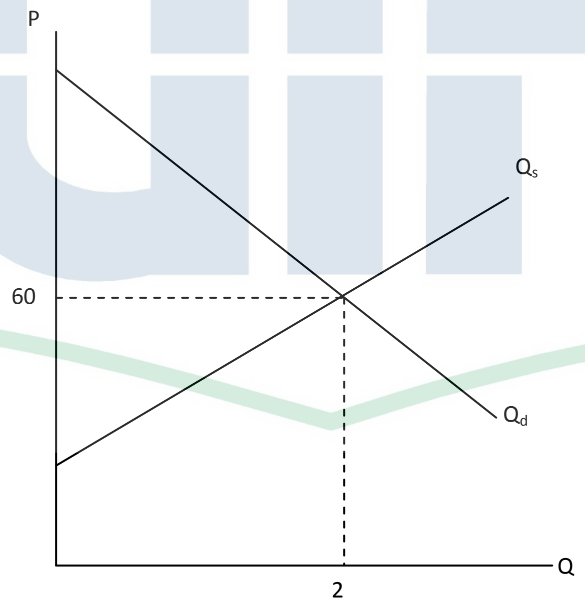
$P_s = 40 + 10Q$

$$P_d = P_s$$
$$100 - 20Q = 40 + 10Q$$
$$60 = 30Q$$
$$Q = 2$$

Setelah didapatkan kuantitas keseimbangan di pasar ialah 2 unit, selanjutnya ialah memasukkan nilai tersebut kepada salah satu fungsi.

$$P_d = 100 - 20Q \qquad P_s = 40 + 10Q$$
$$P_d = 100 - 20(2) \qquad P_s = 40 + 10(2)$$
$$P_d = 60 \qquad P_s = 60$$

Maka keseimbangan pasar tercipta pada harga keseimbangan 60 dan kuantitas keseimbangan sebesar 2 unit




Gambar 5.9.
Grafik fungsi P = 100 – 20Q dan P = 40 + 10Q

## 2. Pengaruh Pajak dan Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar

### a. Pajak

Pajak merupakan pungutan yang ditarik oleh pemerintah terhadap wajib pajak, tanpa mendapatkan wajib pajak, tanpa mendapatkan balas jasa langsung. Pajak yang dipungut oleh pemerintah dapat bersifat pajak langsung dan pajak tidak langsung. Pajak langsung merupakan pajak yang dipungut secara langsung dari wajib pajak seperti pajak kekayaan, pajak pendapatan, dan pajak perseroan. Pajak tidak langsung merupakan pajak yang dipungut pemerintah secara tidak langsung dari wajib pajak, tetapi melalui wajib pungut yang kemudian menyetorkan pajak kepada pemerintah, seperti pajak penjualan dan pajak tontonan.

Dalam pembahasan masalah perpajakan, yang ditekankan adalah pajak tidak langsung yang berupa pajak penjualan. Dengan dibebankan pajak penjualan, harga yang ditawarkan oleh si penjual (penawar) pada suatu tingkat jumlah/kuantitas tertentu akan bertambah sebesar pajak yang dibebankan. Akibat pajak yang dikenakan terhadap suaatu barang tertentu, harga untuk konsumen/pembeli akan lebih tinggi. Dengan demikian, jumlah yang diminta menjadi berkurang. Jadi, pengaruh pajak terhadap keseimbangan pasar mengikuti asumsi-asumsi berikut:

- Dalam pasar persaingan murni (*pure competition*), permintaan konsumen hanya tergantung pada harga, sehingga fungsi permintaan tidak berubah.
- Produsen menyesuaikan kurva penawarannya untuk harga baru yang telah termasuk pajak yang dikenakan.
- Pajak dari t unit uang dikenakan terhadap setiap unit dari jumlah yang dihasilkan.

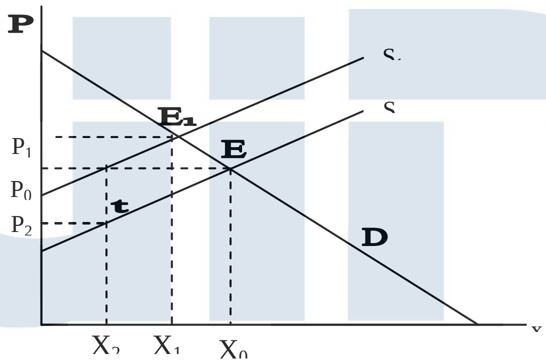
Dalam pembahasan mengenai perpajakan ini kita membedakan pajak yang dikenakan terhadap suatu barang tertentu atas pajak per unit dan pajak persentase.

- **Pajak per Unit**

Pajak per unit adalah pajak yang dikenakan terhadap suatu barang tertentu. Besarnya pajak tersebut ditentukan dalam jumlah uang yang tetap untuk setiap unit barang yang dihasilkan. Dalam hal ini, besarnya pajak per unit dinyatakan dengan tanda “t”. Dengan adanya pajak per unit sebesar t, maka harga yang ditawarkan oleh si penjual (penawar) akan naik sebesar t. Kenaikan ini untuk setiap tingkat jumlah/kuantitas yang ditawarkan. Dilihat dari pengaruh pajak per unit, jika x adalah variabel kuantitas, sedangkan p adalah variabel harga per unit kuantitas, dan t adalah pajak per unit kuantitas, fungsi penawaran akan bergeser ke atas sebesar t untuk setiap tingkat jumlah/kuantitas yang ditawarkan. Dalam bentuk fungsi penawaran, maka fungsi penawaran sebelum pajak adalah p = f (x), maka, fungsi penawaran sesudah pajak adalah $p = f(x) + t$.

Grafik fungsi atau kurva penawaran sebelum dan sesudah pajak dapat dilihat pada gambar 5.10. Berdasarkan gambar ini, terlihat bahwa harga penawaran sebelum pajak pada tingkat kuantitas $x_2$ adalah sebesar $p_2$. Sementara itu, harga penawaran sesudah pajak pada tingkat kuantitas $x_2$ tersebut adalah sebesar $p_2$ + t.

Pengaruh pajak terhadap titik keseimbangan pasar juga dapat dilihat pada Gambar 5.10. Terlihat bahwa apabila fungsi permintaan adalah D : p = g (x) dan fungsi penawaran sebelum pajak adalah S : p = f(x), titik keseimbangan pasarnya adalah E ($x_0$, $p_0$). Sementara itu, titik keseimbangan pasar sesudah pajak adalah $E_1$ ($x_0$, $p_1$) di mana ($x_1$, $p_1$) merupakan titik perpotongan fungsi permintaan D : p = g (x) fungsi penawaran sesudah pajak $S_1$ : $P_1$ = (x) + t.



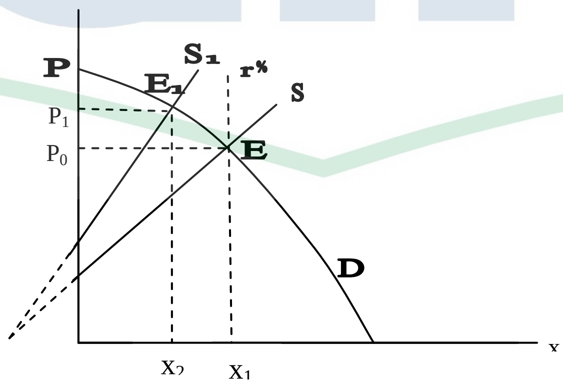

*Gambar 5.10. Keseimbangan pasar Sebelum dan Sesudah Pajak*

Dalam bentuk umum yang lain, fungsi penawaran yaitu x = f (p), maka fungsi penawaran sesudah pajak dapat dipecahkan dengan menggunakan bentuk yang mudah. Dengan demikian, dengan bentuk fungsi terdahulu $P_1$ = f (x) + t, maka diperoleh $p_1$ – t = f (x). Selanjutnya, hasil tersebut kita substitusikan ke dalam x = f (p), maka didapatkan fungsi penawaran sesudah pajak adalah $x_{1=f\,(p1-t)}$. Jadi, apabila fungsi penawaran sesudah pajak adalah S : x = f (p), fungsi penawaran sesudah pajak adalah $S_1$ : $x_1$ = f (p1 – t).

- **Pajak Persentase**

Pajak persentase adalah pajak yang dikenakan terhadap suatu barang tertentu. Pajak tersebut diperhitungkan sebesar persentase (%) yang tetap dari hasil penerimanya. Contohnya pajak penjualan. Dalam hal ini pajak persentase dinyatakan dengan tanda “r”. Dengan adanya pajak persentase sebesar “r”, maka harga yang ditawarkan oleh si penjual (penawar) akan naik sebesar 1% dari harga penjualan semula. Hal ini terjadi untuk masing-masing tingkat jumlah/kuantitas. Yang ditawarkan. Dilihat dari pengaruh pajak persentase ini, jika x adalah variabel kuantitas, sedangkan p adalah variabel harga per unit kuantitas dan r adalah pajak per persentase, fungsi penawaran akan bergerak ke atas sebesar r%. Hal ini terjadi untuk setiap tingkat jumlah/kuantitas yang ditawarkan. Dalam bentuk fungsi penawaran sebelum pajak adalah $p = f(x)$, fungsi penawaran sesudah pajak adalah $p1 = f(x) (1+r) = p (1+r)$. Grafik fungsi atau kurva penawaran sebelum dan sesudah pajak dapat dilihat pada gambar, terlihat bahwa harga penawaran sebelum pajak pada tingkat kuantitas $x_0$ tersebut adalah sebesar $p_r = p_0 + r.p_0 = p_0 (1+r)$ di mana r adalah persentase pajak dikenakan.

Pengaruh pajak terhadap titik keseimbangan pasar juga dapat dilihat pada Gambar 5.11. dari gambar ini terlihat bahwa apabila fungsi permintaan adalah D : $p = g (x)$ dan fungsi penawaran sebelum pajak adalah S : $p = f(x)$, maka titik keseimbangan pasarnya adalah E $(x_0 , p_0)$. Sedangkan keseimbangan pasar sesudah pajak adalah $E_1$ $(x_1 ; p_1)$ di mana $(x_1 ; p_1)$ merupakan titik perpotongan dari fungsi permintaan: D : $P = g (x)$. Fungsi penawaran sesudah pajak $S_1$ : $p = f(x) (1 + r)$.




*Gambar 5.11. Keseimbangan Pasar Sebelum dan Sesudah Pajak*

Dalam bentuk umum yang lain, fungsi penawaran yaitu x = f (p), maka, fungsi penawarang sesudah pajak dapat dipecahkan dengan menggunakan p dalam bentuk yang mudah. Dengan demikian, dengan bentuk fungsi terdahulu:

$P_1 = f(x)\ (1 + r) = p\ (1 + r)$

Maka diperoleh: $p = \frac{p_1}{1+r}$

Selanjutnya, hasil tersebut disubstitusikan ke dalam x = f(p), maka diperoleh fungsi penawaran sesudah pajak, yaitu:

$S_1 : x = f\left(\frac{P_1}{1+r}\right)$

Jadi, fungsi penawaran sebelum pajak adalah S : x = f (p), fungsi penawaran sesudah pajak adalah

$S_1 : x = f\left(\frac{P_1}{1+r}\right)$

Besarnya pajak persentase yang diuraikan di atas dapat disamakan dengan pajak per unit untuk suatu tingkat kuantitas tertentu, yaitu:

$t = r.p \ = r.f(x)\ \left(\frac{r.P_1}{1+r}\right)$

*Contoh:*

- Apabila diketahui fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan dengan persamaan P = 15 – Q dan penawaran P = 3 + 0,5Q. Kemudian apabila terhadap barang tersebut dikenakan pajak spesifik sebesar 3 per unit. Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan sebelum dan sesudah pajak.

Jawab:

Keseimbangan pasar sebelum pajak

$P = 15 - Q \rightarrow Q_d = 15 - P$

$P = 3 + 0{,}5Q \rightarrow Q_s = -6 + 2P$

$Q_d = Q_s$

$15 - P = -6 + 2P$

$21 = 3P$

$P = 7$

Setelah didapatkan harga keseimbangan di pasar ialah Rp 7, selanjutnya ialah memasukkan nilai tersebut kepada salah satu fungsi.

$Q_d = 15 - P$ $\qquad Q_s = -6 + 2P$

$Q_d = 15 - 7$ $\qquad Q_s = -6 + 2(7)$

$Q_d \quad = 8 \qquad\qquad\qquad Q_s \quad = 8$

Setelah dikenakan pajak sebesar 3 per unit, maka fungsi penawarannya saat ini akan berubah, menjadi:

$P = 3 + 0{,}5Q + 3$

$P = 6 + 0{,}5Q \rightarrow Q = -12 + 2P$

Sedangkan fungsi permintaan tetap, yaitu $Q = 15 – P$

Keseimbangan pasar tercipta pada kondisi $Q_d = Q_s$

$15 – P = -12 + 2P$

$3P \quad = 27$

$P \quad = 9$

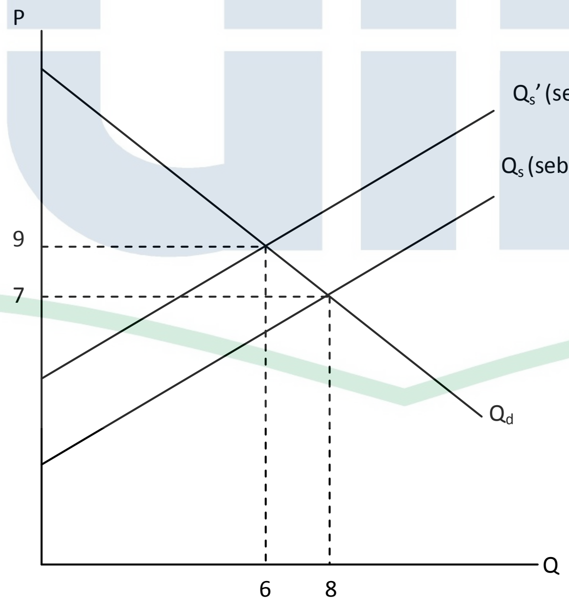
Setelah didapatkan harga keseimbangan P = 9, dimasukkan ke dalam salah satu fungsi yang ada

$Q_d = 15 – P \qquad\qquad Q_s = -12 + 2P$

$Q_d = 15 – 9 \qquad\qquad Q_s = -12 + 2(9)$

$Q_d = 6 \qquad\qquad Q_s = 6$

Sehingga kondisi keseimbangan setelah dikenakan pajak 3 per unit ialah harga keseimbangan meningkat dari sebelum pajak 7 saat ini menjadi 9, dan kuantitas keseimbangan menurun dari semula 8 unit saat ini menjadi 6 unit.




Gambar 5.12.
Kondisi sebelum dan sesudah pajak

Karena produsen mengalihkan sebagian beban pajak tadi kepada konsumen, melalui harga jual yang lebih tinggi, pada akhirnya beban pajak tersebut ditanggung bersama oleh produsen maupun konsumen. Besarnya bagian dari beban pajak yang ditanggung oleh konsumen adalah selisih antara harga keseimbangan sesudah pajak dan harga keseimbangan sebelum pajak. Pada contoh di atas pajak yang ditanggung konsumen ialah 9 – 7 = 2. Berarti dari setiap unit barang yang dibelinya konsumen menanggung beban pajak sebesar 2 per unit.

Sedangkan besarnya bagian dari beban pajak yang ditanggung oleh produsen adalah selisih antara besarnya pajak per unit barang dan bagian pajak yang ditanggung oleh konsumen. Pada contoh d atas 3 – 2 = 1. Hal ini menunjukkan bahwa produsen menanggung beban pajak sebesar 1 per unit.

Kemudian besarnya jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah dapat dihitung dengan mengalikan jumlah barang yang terjual sesudah pengenaan pajak dengan besarnya pajak per unit barang tersebut. Pada contoh ini ialah 6 x 3 = 18, maka besarnya penerimaan pajak oleh pemerintah ialah sebesar 18.

- Dengan menggunakan fungsi permintaan dan penawaran yang sama pada contoh di atas, kemudian pemerintah mengenakan pajak presentase sebesar 25% dari harga jual.

Jawab:

Fungsi permintaan tidak terkena perubahan, yaitu tetap P = 15 – Q

Sedangkan fungsi penawaran mengalami perubahan semenjak dikenakan pajak proporsional sebesar 25% dari harga jual, sehingga fungsi penawaran menjadi:

$P = 3 + 0{,}5Q + 0{,}25P$

$0{,}75P = 3 + 0{,}5Q$

$P = 4 + \frac{2}{3}Q$ atau $Q_s = -6 + 1{,}5P$

Keseimbangan pasar tercipta pada kondisi $Q_d = Q_s$

$15 - P = -6 + 1{,}5P$

$2{,}5P = 21 \rightarrow \quad P = 8{,}4$

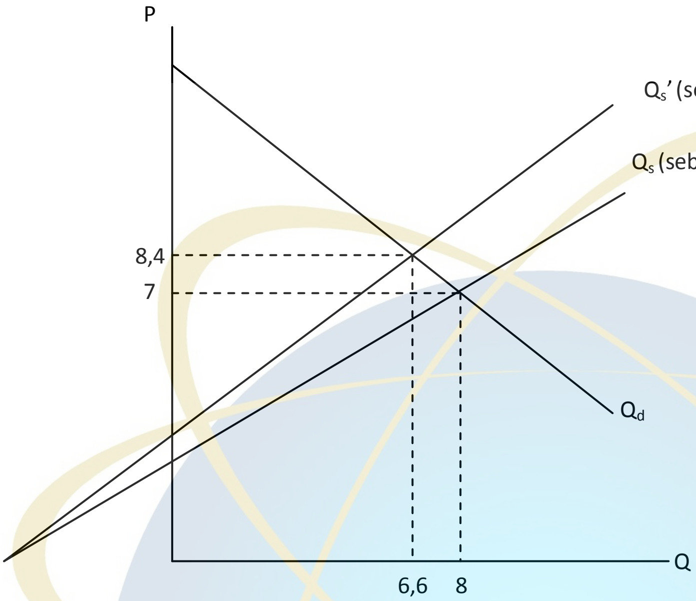
Sedangkan kuantitas keseimbangan ialah

$Q = 15 - P$

$Q = 15 - 8{,}4$

$Q = 6{,}6$

Jadi sesudah pajak, harga keseimbangan berubah menjadi 8,4 dan kuantitas keseimbangan berubah menjadi 6,6. Dan besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah ialah 0,25 x 8,4 = 2,1




Gambar 5.13.
Kondisi sebelum dan sesudah pajak

**Subsidi**

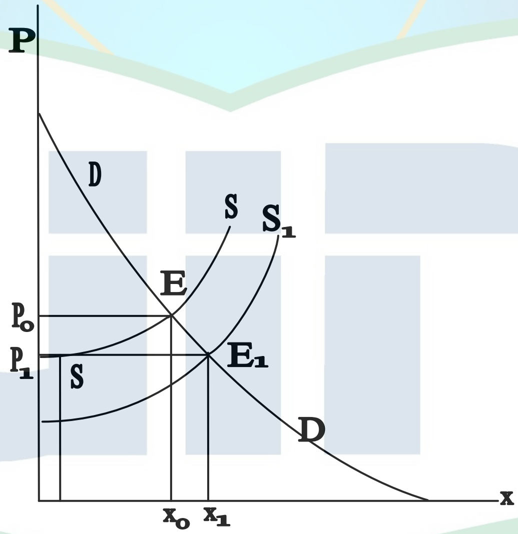
Subsidi merupakan bantuan yang diberikan pemerintah kepada produsen/*supplier* terhadap produk yang dihasilkan atau dipasarkannya. Dengan demikian, harga yang berlaku di pasar adalah harga yang diinginkan pemerintah yaitu harga yang lebih rendah dengan jumlah yang dapat dibeli masyarakat lebih besar. Besarnya subsidi yang diberikan biasanya tetap untuk setiap unit barang yang dihasilkan atau dipasarkan. Notasi besarnya subsidi untuk tiap unit barang yang dihasilkan atau dipasarkan dinyatakan dengan s.

Oleh karena adanya subsidi, tingkat harga yang berlaku di pasar lebih rendah. Hal ini disebahkan sebagian dari biaya-biaya untuk memproduksi dan memasarkan barang tersebut ditanggung pemerintah yaitu sebesar subsidi. Dengan adanya subsidi, fungsi penawaran akan turun atau bergerak ke bawah, sedangkan fungsi permintaan tetap.

Dengan adanya subsidi sebesar s, tingkat harga yang ditawarkan oleh si penjual (penawar) akan turun sebesar s untuk setiap tingkat/jumlah/kuantitas yang ditawarkan. Pengaruh subsidi sebesar s, jika x adalah variabel kuantitas, sedangkan p adalah variabel harga dan s adalah subsidi per unit kuantitas, fungsi penawaran akan bergeser ke bawah sebesar s untuk setiap tingkat jumlah/kuantitas yang ditawarkan. Dalam bentuk fungsi penawaran sebelum subsidi adalah p = f(x), maka fungsi penawaran sesudah subsidi adalah p = f(x) – s.

Grafik fungsi atau kurva penawaran sebelum dan sesudah subsidi dapat dilihat pada gambar 5.14. Dalam gambar ini terlihat bahwa harga penawaran sebelum subsidi pada tingkat kuantitas $x_2$ adalah sebesar $p_2$, sedangkan harga penawaran sesudah subsidi pada tingkat kuantitas $x_2$ tersebut adalah sebesar $p_2 - s$.

Pengaruh subsidi terhadap titik keseimbangan pasar juga dapat dilihat pada Gambar 5.14. terlihat bahwa bila fungsi permintaan adalah D : p = f(x), dan fungsi penawaran sebelum subsidi adalah S : p = f(x), titik keseimbangan pasarnya adalah E ($x_0$ ; $p_0$). Sedangkan, titik keseimbangan pasar sesudah subsidi adalah E ($x_1$ ; $p_1$) di mana ($x_1$ ; $P_1$) merupakan titik perpotongan dari fungsi permintaan D : p = f (x) dan fungsi penawaran sesudah subsidi yaitu S : $p_1$ = f (x) – s.




*Gambar 5.14. kurva permintaan dan Penawaran Sebelum dan Sesudah Subsidi*

Dalam bentuk umum yang lain, fungsi penawaran yaitu x = f(p), maka fungsi penawaran sesudah subsidi dapat dipecahkan dengan menggunakan p dalam bentuk yang mudah. Berdasarkan bentuk fungsi penawaran terdahulu, didapatkan $p_1$ = f(x) – s dan bila diolah, diperoleh $p_1$ + s = f(x).

Dengan mensubstitusikan ke dalam bentuk fungsi x = f(p), maka didapatkan fungsi penawaran sesudah subsidi yaitu $S_1$ : $x_1$ f($P_1$ + s). Jadi fungsi penawaran sebelum subsidi adalah S : x = f(p), fungsi penawaran sesudah subsidi adalah $S_1$ : $x_1 = f(P_1 + s)$.

*Contoh:*

- Dengan menggunakan fungsi permintaan dan penawaran yang sama pada contoh di atas yaitu permintaan ialah $P_d = 15 – Q$, dan penawaran ialah $P_s = 3 + 0{,}5Q$. Pemerintah memberikan subsidi sebesar 1,5 per unit barang yang diproduksi. Berapakah harga dan kuantitas keseimbangan dengan subsidi.

Jawab:

Keseimbangan harga dan kuantitas tanpa subsidi ialah P = 7 dan Q = 8

Dengan subsidi harga jual yang ditawarkan oleh produsen menjadi lebih rendah, sehingga fungsi penawarannya pun berubah

$P_s = 3 + 0{,}5Q$ (sebelum subsidi)

$P_s = 3 + 0{,}5Q – 1{,}5$ (sesudah subsidi)

$P_s = 1{,}5 + 0{,}5Q \rightarrow Q_s = -3 + 2P$

Kondisi keseimbangan $Q_d = Q_s$

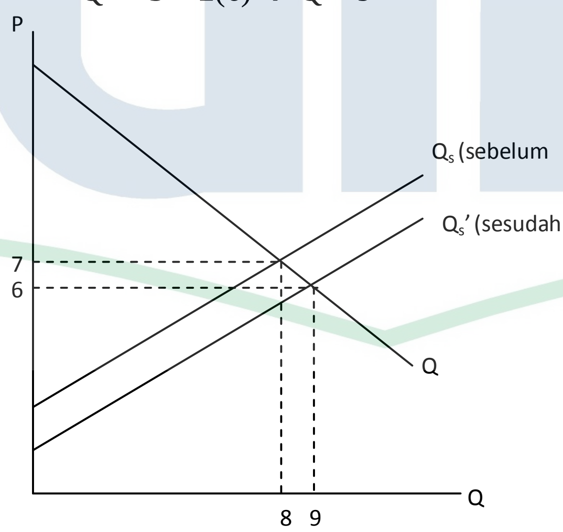
$15 – P = -3 + 2P$

$3P = 18 \rightarrow P = 6$

Kuantitas keseimbangan:

$Q = -3 + 2P$

$Q = -3 + 2(6) \rightarrow Q = 9$




Gambar 5.15.
Kondisi sebelum dan sesudah subsidi

Bagian subsidi yang dinikmati oleh konsumen meskipun secara tidak langsung ialah selisih antara harga keseimbangan tanpa subsidi dengan harga keseimbangan dengan subsidi. Dalam contoh ini ialah 7 – 6 = 1. Berarti dari setiap unit barang yang dibelinya konsumen secara tidak langsung menerima subsidi sebesar 1 per unit.

Besarnya bagian dari subsidi yang dinikmati oleh produsen adalah selisih antara besarnya subsidi per unit barang dan bagian subsidi yang dinikmati oleh konsumen. Pada contoh ini ialah 1,5 – 1 = 0,5. Berarti dari setiap unit barang yang diproduksi dan dijualnya produsen menerima subsidi sebesar 0,5.

Besarnya jumlah subsidi yang diberikan oleh pemerintah ialah jumlah barang yang terjual dikalikan dengan besaran subsidi, yaitu: 9 x 1,5 = 13,5

- Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $Q_d = 17 - P$ dan fungsi penawaran adalah $Q_s = -8 + 4P$. Hitunglah: (a) harga dan kuantitas keseimbangannya; (b) bagaimanakah harga dan kuantitas keseimbangan jika pemerintah mengenakan pajak spesifik sebesar 1,5/unit; (c) bagaimanakah harga dan kuantitas keseimbangan jika pemerintah mengenakan subsidi sebesar 1/unit?

Jawab:

(a) Harga dan kuantitas keseimbangan

$$\left.\begin{aligned} Q_s &= -10 + 4P \\ Q_d &= 15 - P \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -10 + 4P &= 15 - P \\ 5P &= 25 \rightarrow \quad P = 5 \end{aligned}$$

$Q_s = -10 + 4(5) = 10$

$Q_d = 15 - 5 = 10$

(b) Jika pemerintah mengenakan pajak sebesar 1,5/unit

$Q_s = -10 + 4P$

$4P = Q_s + 10$

$P = 0{,}25\,Q + 2{,}5$

Setelah pemerintah mengenakan pajak sebesar 1,5/unit

$P = 0{,}25\,Q + 2{,}5 + 1{,}5$

$P = 0{,}25\,Q + 4$

$P - 4 = 0{,}25\,Q$

$Q_s = 4P - 16$

Kondisi keseimbangan ialah $Q_s = Q_d$

$-16 + 4P = 15 - P$

$5P = 31$

$P = 6{,}2$

$Q_d = 15 - P$

$Q_d = 15 - 6{,}2$

$Q_d = 8{,}8$ (dibulatkan menjadi Q = 9)

Jadi harga dan kuantitas keseimbangan ialah P = 6,2; Q = 9

(c) Jika pemerintah mengenakan subsidi sebesar 1/unit

$Q_s = -10 + 4P$

$4P = Q_s + 10$

$P = 0{,}25\ Q + 2{,}5$

Setelah pemerintah mengenakan pajak sebesar 1/unit

$P = 0{,}25\ Q + 2{,}5 - 1$

$P = 0{,}25\ Q + 1{,}5$

$P - 1{,}5 = 0{,}25\ Q$

$Q_s = 4P - 6$

Kondisi keseimbangan ialah $Q_s = Q_d$

$-6 + 4P = 15 - P$

$5P = 21$

$P = 4{,}2$

$Q_d = 15 - P$

$Q_d = 15 - 4{,}2$

$Q_d = 10{,}8$ (dibulatkan menjadi Q = 11)

Jadi harga dan kuantitas keseimbangan ialah P = 4,2; Q = 11

- Permintaan akan suatu komoditas diketahui memiliki fungsi $P = 17 - Q_d$, sedangkan penawaran $P = 0{,}25Q_s + 0{,}75$. Hitunglah: (a) berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangannya; (b) berapa subsidi harus diberikan agar komoditas tersebut menjadi gratis?

Jawab:

(a) $P = 17 - Q_d$ → $Q_d = 17 - P$

$P = 0{,}25\ Q_s + 0{,}75$ → $Q_s = -3 + 4P$

$17 - P = -3 + 4P$

$20 = 5P$

$P = 4$

$Q = 17 - P \rightarrow Q = 17 - 4 = 13$

(b) Harga dari sisi penawaran : $P = 0{,}25Q_s + 0{,}75$

Setelah subsidi : $P = 0{,}25Q + 0{,}75 - X$

$Q = 4P - 3 + 4X$

Kondisi keseimbangan: $Q_s = Q_d$

$4P - 3 + 4X = 17 - P$, dimana $P = 0$

$4X = 20$

$X = 5$

Jadi subsidi yang harus diberikan agar barangnya menjadi gratis adalah sebesar 5.

**3. Keseimbangan Pasar Kasus Dua Macam Barang**

Persamaan fungsi permintaan yang berbentuk $Q = a - bP$ mencerminkan hubungan fungsional antara jumlah permintaan dan harga barang tersebut. Bentuk persamaan ini mengadung asumsi bahwa permintaan hanya dipengaruhi oleh harga barang itu sendiri, sedangkan faktor lain dianggap tidak berpengaruh. Sedangkan dalam kenyataan, ada barang-barang tertentu yang sifat permintaannya tidak hanya dipengaruhi oleh harga barang itu sendiri, tetapi juga dipengaruhi oleh faktor atau variabel-variabel lain.

Hubungan antara dua jenis barang dapat bersifat saling menggantikan, misalnya lontong sayur dengan bubur. Maka jenis barang ini disebut memiliki hubungan subtitusi. Dan ada hubungan yang bersifat komplementer atau saling melengkapi, misalkan antara teh dan gula.

*Contoh:*

- Misalkan diketahui fungsi permintaan dan penawaran atas “mainan robot” (X) ialah: $Q_{dx} = 9 - 3P_x + 2P_y$ dan $Q_{sx} = -1 + 2P_x$

  Kemudian fungsi permintaan dan penawaran untuk “mainan mobil” (Y) ialah $Q_{dy} = 7 - P_y + 2P_x$ dan $Q_{sy} = -5 + 3P_y$

  Berapakah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing mainan tersebut?

Jawab:

Keseimbangan untuk mainan robot (X):

$9 - 3P_x + 2P_y = -1 + 2P_x$

$5P_x - 2P_y = 10$ ……………………………….(1)

Keseimbangan untuk mainan mobil (Y)

$7 - P_y + 2P_x = -5 + 3P_y$

$-2 P_x + 4P_y = 12$ ……………………………….(2)

Dari persamaan (1) dan (2) dilakukan eliminasi

$5P_x - 2P_y = 10 \rightarrow x\ 2 \rightarrow 10P_x - 4P_y = 20$

$-2P_x + 4P_y = 12 \rightarrow x\ 1 \rightarrow \underline{-2Px + 4P_y = 12}\ +$

$8P_x = 32$

$P_x = 4$

Kemudian dimasukkan pada salah satu persamaan:

$5P_x - 2P_y = 10$

$5(4) - 2P_y = 10$

$20 - 2P_y = 10$

$10 = 2P_y \rightarrow P_y = 5$

Setelah didapatkan harga dari masing-masing mainan tersebut, maka selanjutnya dikembalikan kepada fungsi asalnya:

Untuk mainan robot: $Q_{dx} = 9 - 3P_x + 2P_y$

$Q_{dx} = 9 - 3(4) + 2(5)$

$Q_{dx} = 7$

Untuk mainan mobil: $Q_{dy} = 7 - P_y + 2P_x$

$Q_{dy} = 7 - 5 + 2(4)$

$Q_{dy} = 10$

Sehingga harga dan kuantitas keseimbangan untuk mainan robot adalah 4 dan 7, sedangkan harga dan kuantitas keseimbangan mainan mobil adalah 5 dan 10.

- Misalkan diketahui fungsi permintaan akan “lontong sayur (X)”ialah:

  $Q_{dx} = 10 - 4P_x + 2P_y$, sedangkan penawarannya ialah $Q_{sx} = -6 + 6P_x$

Kemudian permintaan akan ”bubur ayam (Y)”ditunjukkan oleh:

$Q_{dy} = 9 - 3P_y + 4P_x$, sedangkan penawarannya ialah $Q_{sy} = -3 + 7P_y$

Berapakah harga dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar untuk masing-masing barang tersebut?

Jawab:

Keseimbangan pasar barang "lontong sayur (X)":

$$Q_{dx} = Q_{sx}$$
$$10 - 4P_x + 2P_y = -6 + 6P_x$$
$$10\,P_x - 2P_y = 16 \quad \text{...............................}(1)$$

Keseimbangan pasar barang "bubur ayam (Y)":

$$Q_{dy} = Q_{sy}$$
$$9 - 3P_y + 4P_x = -3 + 7P_y$$
$$4\,P_x - 10P_y = -12 \quad \text{...............................}(2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) tersebut dilakukan eliminasi:

$$10\,P_x - 2P_y = 16 \rightarrow \text{x } 1 \rightarrow 10P_x - 2P_y = 16$$
$$4\,P_x - 10P_y = -12 \rightarrow \text{x } 2{,}5 \rightarrow \underline{10P_x - 25P_y = -30} \; \_$$
$$23\,P_y = 46 \rightarrow P_y = 2$$

Setelah didapatkan nilai $P_y$, maka kemudian dimasukkan ke dalam salah satu persamaan. $10P_x - 2P_y = 16$

$$10P_x - 2(2) = 16$$
$$10P_x = 20$$
$$P_x = 2$$

Setelah didapatkan nilai $P_x$ dan $P_y$, maka kemudian dimasukkan ke dalam persamaan pada masing-masing barang. Bagi barang "lontong sayur (X)":

$$Q_{sx} = -6 + 6P_x$$
$$Q_{sx} = -6 + 6\,(2)$$
$$Q_{sx} = 6$$

Sedangkan bagi barang "bubur ayam (Y)":

$$Q_{sy} = -3 + 7P_y$$
$$Q_{sy} = -3 + 7(2)$$
$$Q_{sy} = 11$$

Harga keseimbangan dan kuantitas keseimbangan bagi lontong sayur ialah: 2 dan 6, sedangkan harga keseimbangan dan kuantitas keseimbangan bagi bubur ayam adalah 2 dan 11.

## 4. Fungsi Biaya, Penerimaan dan Keuntungan

### Biaya

Biaya produksi dapat diartikan sebagai semua pengeluaran yang dilakukan oleh perusahaan untuk memperoleh faktor-faktor produksi dan bahan-bahan mentah yang akan digunakan untuk menciptakan barang-barang yang diproduksi oleh perusahaan tersebut. Biaya produksi secara garis besar dibedakan dua macam, yaitu biaya eksplisit dan biaya tersembunyi (*imputed cost*) (Sukirno, 2000: 205). Biaya eksplisit adalah pengeluaran-pengeluran yang berupa pembayaran dengan uang untuk mendapatkan faktor-faktor produksi dan bahan mentah yang dibutuhkan. Sedangkan biaya tersembunyi adalah taksiran pengeluaran terhadap faktor-faktor produksi yang dimiliki oleh perusahaan itu sendiri.

Biaya total adalah keseluruhan jumlah biaya produksi yang dikeluarkan. Biaya dapat dibedakan menjadi tiga hal: biaya total (*total cost*), biaya tetap total *(total fixed cost*), biaya berubah total (*total variable cost*). Biaya total (*total cost)* adalah keseluruhan jumlah biaya produksi yang dikeluarkan, dimana terdiri dari penjumlahan antara biaya tetap total (TFC-total fixed cost-) dan biaya berubah total (TVC-total variable cost-). Biaya Secara matematis dapat ditulis dengan: TC = TFC + TVC. Biaya tetap total (TFC) adalah keseluruhan biaya yang dikeluarkan untuk memperoleh faktor produksi (input) yang tidak dapat diubah jumlahnya, jadi berapapun tingkat produksi yang dihasilkan produsen maka ia harus menanggung biaya yang sama besarnya. Sebagai contoh biaya tetap total adalah sewa bangunan/gedung/pabrik, diasumsikan biaya sewa per tahun adalah 50.000, berapapun jumlah produksi yang dihasilkan –termasuk ketika perusahaan tidak memproduksi- maka jumlah biaya yang harus dikeluarkan tetap 50.000.

Biaya berubah total (TVC) adalah keseluruhan biaya yang dikeluarkan untuk memperoleh faktor produksi yang dapat diubah jumlahnya sesuai dengan jumlah produksi yang dihasilkan. Dimisalkan faktor produksi yang dapat berubah jumlahnya adalah tenaga kerja, bila produsen menambah kapasitas produksinya maka ia harus menambah tenaga kerjanya, sehingga biaya tenaga kerja yang harus dikeluarkan bertambah pula, apabila perusahaan mengurangi jumlah produksinya maka biaya tenaga kerja yang harus dikeluarkan pun akan berkurang pula.

Biaya rata-rata dibedakan kepada tiga pengertian: biaya tetap rata-rata (*average fixed cost*), biaya berubah rata-rata (*average variable cost*) dan biaya total rata-rata (*average total cost*).

Biaya tetap rata-rata (AFC) adalah biaya tetap total (TFC)untuk memproduksi sejumlah barang dibagi dengan jumlah produksi tersebut. Secara matematis dapat ditulis

$$AFC = \frac{TFC}{Q}$$

Sementara biaya berubah rata-rata (AVC) adalah apabila biaya berubah total (TVC) untuk memproduksi sejumlah barang dibagi dengan jumlah produksi tersebut. Biaya berubah rata-rata dihitung dengan rumus:

$$AVC = \frac{TVC}{Q}$$

Sedangkan biaya total rata-rata (AC) adalah apabila biaya total (TC) untuk memproduksi sejumlah barang tertentu dibagi dengan jumlah produksi tersebut. Secara rumus dapat ditulis dengan:

$$AC = \frac{TC}{Q} \, atau$$

$$AC = AFC + AVC$$

Biaya marjinal (MC) adalah kenaikan biaya produksi yang dikeluarkan untuk menambah produksi sebanyak satu unit dinamakan biaya marjinal. Dengan demikian, berdasarkan kepada definisi ini, biaya marjinal dapat ditulis secara matematis dengan:

$MC_n = TC_n – TC_{n-1}$

Dimana $MC_n$ adalah biaya marjinal produksi ke-n, $TC_n$ adalah biaya total pada waktu jumlah produksi adalah n, dan $TC_{n-1}$ adalah biaya total pada waktu jumlah produksi adalah n-1. Akan tetapi pada umumnya pertambahan satu unit faktor produksi akan menambah beberapa unit produksi.

*Contoh:*

- Apabila suatu perusahaan perusahaan harus mengeluarkan biaya tetap setiap bulannya sebesar Rp 1.000.000,-, sedangkan biaya variabelnya ditunjukkan oleh persamaan VC = 1000Q. Tunjukkan persamaan dan grafik biaya totalnya! Kemudian berapa biaya yang yang harus dikeluarkan jika perusahaan tersebut memproduksi 200 unit barang?

Jawab:

FC = 1.000.000

VC = 1000Q

TC = VC + FC

= 1.000Q + 1.000.000

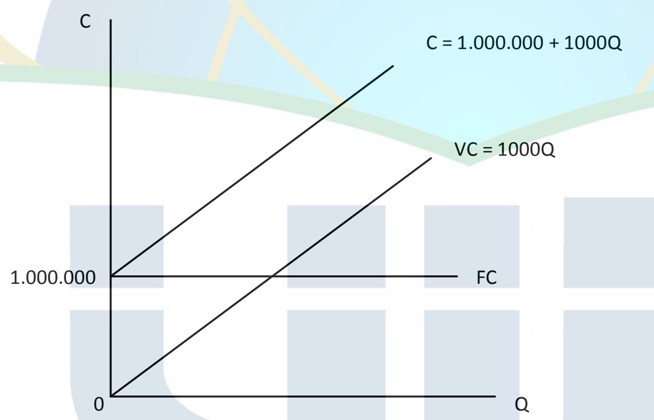
Jika Q = 200 unit, maka biaya yang harus dikeluarkan ialah:

TC = 1000Q + 1.000.000

= 1000 ( 200) + 1.000.000

TC = 1.200.000

Sehingga biaya total yang harus dikeluarkan oleh perusahaan pada saat memproduksi 200 unit barang ialah sebesar Rp 1.200.000,-




Gambar 5.16
Fungsi biaya 1.000.000 + 1000Q

**Penerimaan**

Penerimaan (revenue) yang dimaksud adalah penerimaan produsen dari hasil penjualan produksinya. Ada beberapa konsep penerimaan yang penting dalam melakukan analisis prilaku produsen(Boediono, 1996: 95)

(a) Penerimaan total *(total revenue)*

Yaitu total penerimaan produsen dari hasil penjualan produksinya (output). Sehingga penerimaan total adalah jumlah produksi yang terjual dikalikan dengan harga jual produk.

TR = Pq x Q

(b) Penerimaan rata-rata (*average revenue*), yaitu penerimaan produsen per unit produk yang mampu dijual oleh produsen.

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{Pq.Q}{Q} = Pq$$

Jadi AR tidak lain adalah harga (jual) produk per unit.

(c) Penerimaan marjinal (*marginal revenue*), yaitu kenaikan dari penerimaan total (TR) yang disebabkan oleh tambahan penjualan 1 unit produk (output)

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}$$

*Contoh:*

- Apabila suatu perusahaan menjual hasil produksinya sebesar Rp 5.000,- per unit. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan ini. Serta berapa besarnya penerimaan bila terjual barang sebanyak 400 unit?

Jawab:

Persamaan penerimaan ialah:

TR = P x Q

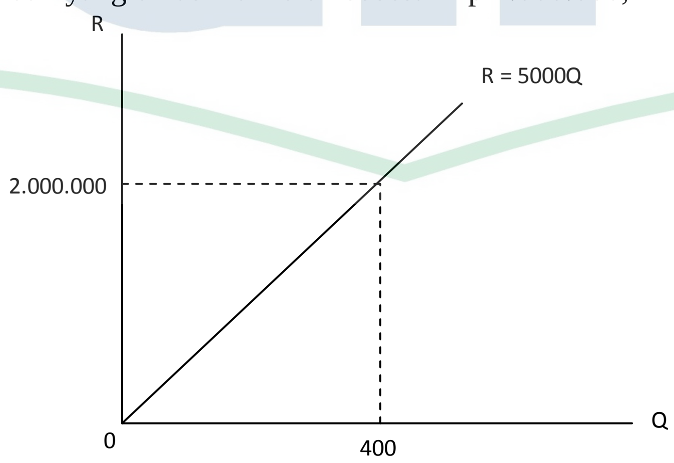
= 5.000 x Q → TR= 5000Q

Apabila perusahaan mampu menjual sebanyak 400 unit, maka penerimaannya

TR = 5.000Q

= 5.000 (400) → TR = 2.000.000

Maka penerimaan perusahaan apabila mampu menjual sebanyak 400 unit, maka penerimaan yang dihasilkan ialah sebesar Rp 2.000.000,-




Gambar 5.17
Grafik fungsi R = 5000Q

**Keuntungan**

Produsen dianggap akan selalu memilih tingkat output dimana bisa mendapatkan keuntungan total yang maksimum. Bila produsen telah mencapai posisi ini dikatakan telah berada pada posisi equlibrium, disebut posisi equilibrium karena pada posisi ini tidak ada kecenderungan baginya untuk mengubah output (dan harga output)nya. Sebab bila ia mengurangi (atau menambah) volume output (penjualannya), maka keuntungan totalnya justru menurun. Hal ini terjadi karena pada posisi equlibrium telah tercapai jumlah output dan harga output yang optimal untuk mendapatkan keuntungan maksimum, bila produsen menambah jumlah outputnya bisa menyebabkan output tersebut tidak terserap pasar yang akan mengakibatkan penurunan keuntungan.

*Contoh:*

- Apabila biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukkan dengan persamaan C = 1.000.000 + 1000Q dan penerimaan totalnya R = 5000Q. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan ini berada dalam posisi pulang-pokok (*break-even point*)? Apa yang terjadi jika perusahaan memproduksi sebesar 150 unit dan 400 unit?

*Jawab:*

$\pi = R - C$

*Break-even* terjadi pada kondisi $\pi = 0 \rightarrow R = C$

$5000Q = 1.000.000 + 1000Q$

$4000Q = 1.000.000$

$Q = 250$

Perusahaan pada posisi pulang-pokok pada saat memproduksi sebesar 250 unit.

Kondisi pada saat perusahaan memproduksi sebesar 150 unit

$\pi = R - C$

$= 5000Q - (1.000.000 + 1.000Q)$

$= 5000 (150) - (1.000.000 + 1.000(150))$

$= 750.000 - 1.150.000 \rightarrow \pi = - 400.000$

Apabila perusahaan memproduksi sebesar 150 unit, maka ia akan mengalami kerugian sebesar Rp 400.000,-

Kondisi pada saat perusahaan memproduksi sebesar 400 unit

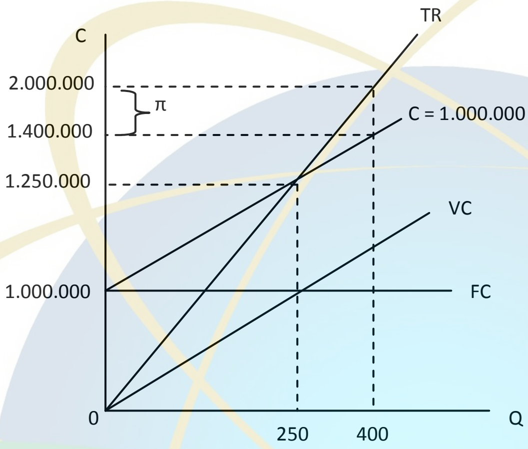
$\pi$ = R – C

= 5000Q – (1.000.000 + 1.000Q)

= 5000 (400) – (1.000.000 + 1.000(400))

= 2.000.000 – 1.400.000 → $\pi$ = 600.000

Apabila perusahaan memproduksi sebesar 400 unit, maka ia akan mengalami keuntungan sebesar Rp 600.000,-




Gambar 5.18

Fungsi analisis pulang-pokok

- Jika suatu perusahaan memiliki biaya variabel rata-rata sebesar 60% dari harga jual produknya, sedangkan biaya tetapnya adalah sebesar Rp 3.000,-. Kemudian ia menjual produk tersebut dengan harga Rp 20,-. Hitunglah (a) berapa jumlah produk yang harus dihasilkan agar produsen tersebut pada posisi *break-even*? (b) berapa keuntungannya jika ia memproduksi sebanyak 500 unit?

Jawab:

(a) Biaya variabel rata-rata (AVC) = 60% * (20) = 12

Biaya variabelnya adalah AVC x Q = 12Q

Biaya total adalah biaya tetap ditambah dengan biaya variabel

TC = FC + VC

TC = 3000 + 12Q

Penerimaan dari produksi (TR) adalah harga dikalikan dengan kuantitas

TR = P x Q = 20Q

Posisi break-even terjadi pada saat kondisi $\pi$ = 0

TR = TC

20Q = 3000 + 12Q

8Q = 3000

Q = 375 unit

(b) Keuntungan pada saat memproduksi sebanyak 500 unit

Penerimaan dari produsen pada saat memproduksi sebanyak 500 unit adalah TR = P x Q

TR = 20 (500) = 10.000

Biaya yang harus dikeluarkan oleh produsen pada saat memproduksi sebanyak 500 unit ialah TC = 3000 + 12Q

TC = 3000 + 12 (500) = 9.000

Maka keuntungan ($\pi$) = TR – TC

$\pi$ = 10.000 – 9.000

$\pi$ = 1.000

## 5. Konsumsi, Tabungan, Pendapatan dan Investasi

Dalam makroekonomi, pendapatan masyarakat suatu Negara secara keseluruhan (pendapatan nasional) dialokasikan kepada dua hal, yaitu konsumsi dan tabungan. Jika pendapatan disimbolkan dengan Y, sedangkan konsumsi dan tabungan disimbolkan dengan C dan S, maka

Y = C + S

Baik konsumsi nasional maupun tabungan nasioonal pada umumnya merupakan fungsi dari pendapatan nasional. Keduanya berbanding lurus dengan pendapatan nasional. Semakin besar pendapatan, maka semakin besar pula konsumsi dan tabungannya, begitu pula sebaliknya.

**Konsumsi**

Fungsi konsumsi menjelaskan hubungan antara konsumsi dan pendapatan nasional, yang secara umum dapat disimbolkan dengan:

$C = f(Y) = C_0 + cY$

Dimana $C_0$ ialah konstanta yang menunjukkan besarnya konsumsi nasional pada kondisi pendapatan nasional sebesar nol. Kemudian koefisien c menunjukkan kecenderungan mengkonsumsi masyarakat (*marginal propensity to consume*/MPC), dimana nilainya berkisar $0 < c < 1$.

**Tabungan**

Fungsi tabungan menjelaskan hubungan antara tabungan dengan pendapatan nasional. Secara umum dapat dituliskan menjadi:

$$S = f(Y) = S_0 + sY$$

Dimana $S_0$ ialah konstanta yang menunjukkan besarnya tabungan pada kondisi pendapatan sebesar nol (biasanya $S_0$ akan memiliki tanda negatif). Sedangkan koefisien s menunjukkan kecenderungan menabung masyarakat (*marginal propensity to saving/MPS*), dimana nilainya berkisar $0 < s < 1$. Nilai MPC ditambah dengan nilai MPS akan sama dengan 1.

*Contoh:*

Apabila konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan sebagai berikut: C = 40 + 0,75Y. Bagaimanakah fungsi tabungannya? Dan berapa besar konsumsi jika tabungan sebesar 20?

$$\begin{aligned} S &= Y - C \\ &= Y - (40 + 0{,}75Y) \\ &= -40 + 0{,}25\,Y \end{aligned}$$

Jika S = 20, maka

$$\begin{aligned} 20 &= -40 + 0{,}25Y \\ 60 &= 0{,}25Y \\ Y &= 240 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} C &= Y - S \\ &= 240 - 20 \\ C &= 220 \end{aligned}$$

Pada saat tabungan sebesar 20, maka besarnya konsumsi masyarakat sebesar 220.

**Pendapatan**

Pendapatan nasional pada dasarnya merupakan penjumlahan total dari pendapatan semua sektor di dalam suatu Negara. Sedangkan pendapatan disposabel ($Y_d$) ialah pendapatan nasional yang secara nyata dapat dibelanjakan oleh masyarakat, yaitu pendapatan bersih yang diterima oleh masyarakat pada suatu negara.

Pada kondisi tidak terdapat pajak maupun transfer, maka

$$Y_d = Y$$

Dalam hal terdapat pajak, maka

$$Y_d = Y - T$$

Dalam hal terdapat transfer, maka

$$Y_d = Y + Tr$$

Pada kondisi terdapat pajak dan transfer, maka

$$Y_d = Y - T + Tr$$

*Contoh:*

- Fungsi konsumsi masyarakat suatu Negara ditunjukkan $C = 40 + 0{,}75Y_d$. Jika pemerintah menerima pendapatan pajak sebesar 15 milyar dan memberikan transfer berupa subsidi sebesar 5 milyar, maka berapakah konsumsi nasional seandainya pendapatan nasional pada tahun tersebut sebesar 200 milyar? Berapa pula tabungan nasional?

Jawab:

$$Y_d = 200 - 15 + 5$$
$$Y_d = 190$$

Besaran konsumsi nasional pada pendapatan sebesar 200 milyar

$$C = 40 + 0{,}75\ Y$$
$$= 40 + 0{,}75\ (190)$$
$$= 182{,}5$$

Besarnya konsumsi pada pendapatan nasional negara tersebut sebesar 200 milyar ialah sebesar 182,5 milyar.

$$S = Y_d - C$$
$$= 190 - 182{,}5$$
$$= 7{,}5$$

Besarnya tabungan nasional pada kondisi pendapatan nasional sebesar 200 milyar ialah sebesar 7,5 milyar.

- Jika diketahui konsumsi otonomos masyarakat di suatu Negara ialah sebesar 400, sedangkan kecenderungan mengonsumsinya sebesar 0,8. Bagaimanakah (a) fungsi konsumsi dan fungsi tabungannya? (b) Berapa besar konsumsi dan tabungan jika tingkat pendapatan nasional adalah 10.000?

Jawab:

a = 400

b = 0,8

Fungsi konsumsinya adalah C = a + bY

C = 400 + 0,8Y

Fungsi tabungan ialah S = Y – C

S = Y – 400 – 0,8Y

S = -400 + 0,2Y

Jika pendapatan nasional (Y) sebesar 10.000

Maka, konsumsinya sebesar C = 400 + 0,8 (10.000)

C = 8.400

Dan tabungannya sebesar S = -400 + 0,2 (10.000)

S = 1.600

**Investasi**

Permintaan akan investasi merupakan fungsi dari tingkat bunga. Jika investasi disimbolkan dengan I dan tingkat bunga dilambangkan dengan i atau r (i melambangkan tingkat bunga nominal; dan; r melambangkan tingkat bunga riel yang sudah terdapat inflasi di dalamnya). Secara umum fungsi investasi dapat dituliskan sebagai:

I = f(i)

$I = I_0 – p.i$

Permintaan akan investasi berbanding terbalik dengan tingkat bunga. Hal ini dapat dipahami secara logika ekonomi, dimana apabila tingkat bunga tinggi maka orang akan menaruh dananya pada tabungan dibandingkan dengan berinvestasi. Selain itu tingginya tingkat bunga, akan memberikan beban tambahan bagi dunia usaha.

*Contoh:*

Jika permintaan akan investasi ditunjukkan oleh I = 250 – 500i, berapa besarnya investasi pada saat tingkat bunga bank yang berlaku sebesar 12%. Berapa pula investasi jika tingkat bunga sebesar 20%?

Jawab:

I = 250 – 500i

Jika i = 12% → 0,12

I = 250 – 500 (0,12)

I = 250 – 60

I = 190

Jika i = 20%, maka

I = 250 – 500 (0,2)

I = 100

**6. Analisis IS-LM**

Analisis IS-LM merupakan salah satu analisis dasar dalam makroekonomi untuk melihat keseimbangan yang terjadi di pasar barang (*Investment-Saving*/IS) dan di pasar uang (*Liquidity Money*/LM). Dimana keduanya menunjukkan hubungan antara pendapatan nasional dan tingkat bunga.

Pada model ekonomi sederhana (dua sektor), persamaan kurva IS dapat dibentuk dengan menyamakan persamaan investasi terhadap persamaan tabungan.

$$I = I_0 - pi$$

$$S = S_0 + sY$$

$$I = S$$

$$I_0 - pi = S_0 + sY$$

$$Y = \frac{I_0 - S_0}{s} - \frac{p}{s} i$$

Misalkan: $(I_0 - S_0)/s = Y_b$; dan; $p/s = b$, maka bentuk persamaan IS dapat ditulis:

$$Y = f(i) = Y_b - bi$$

Persamaan LM dapat dibentuk dengan menyamakan antara persamaan permintaan uang (*liquidity preference*) terhadap persamaan penawaran uang (*money*).

Permintaan uang : $L = L_0 + kY - hi$

Penawaran uang : $M = M_0$

$$L = M$$

$$L_0 + kY - hi = M_0$$

$$Y = \frac{M_0 - L_0}{k} + \frac{h}{k} i$$

Misalkan: $(M_0 - L_0)/k = Y_u$; dan; $h/k = u$, maka bentuk persamaan kurva LM dapat dituliskan sebagai:

$$Y = f(i) = Y_u + ui$$

*Contoh:*

Apabila diketahui fungsi konsumsi suatu negara ialah C = 500 + 0,80Y, serta fungsi investasi ialah I = 2000 – 5000i. Kemudian jumlah uang beredar (penawaran uang) sebesar 9.000, dan fungsi permintaan uang oleh masyarakat sebesar L = 10.000 + 0,4Y – 20.000i. Buatlah persamaan IS-LM serta keseimbangannya?

Jawab:

Persamaan IS

$C = 500 + 0{,}80Y$, maka

$S = -500 + 0{,}20Y$

$I = 2000 - 5000i$

$$I = S$$

$$2000 - 5000i = -500 + 0{,}20\,Y$$

$$2500 - 5000i = 0{,}20Y$$

$$Y = 12.500 - 25.000i$$

Persamaan LM:

$$L = M$$

$$10.000 + 0{,}4\,Y - 20.000i = 9.000$$

$$0{,}4Y = -\,1.000 + 20.000i$$

$$Y = -2.500 + 50.000i$$

Keseimbangan IS-LM

$$IS = LM$$

$$12.500 - 25.000i = -2.500 + 50.000i$$

$$15.000 = 75.000i$$

$$i = 0{,}20$$

Setelah mendapatkan i = 0,20, kemudian dimasukkan kepada salah satu persamaan IS atau LM

IS → $Y = 12.500 - 25.000i$

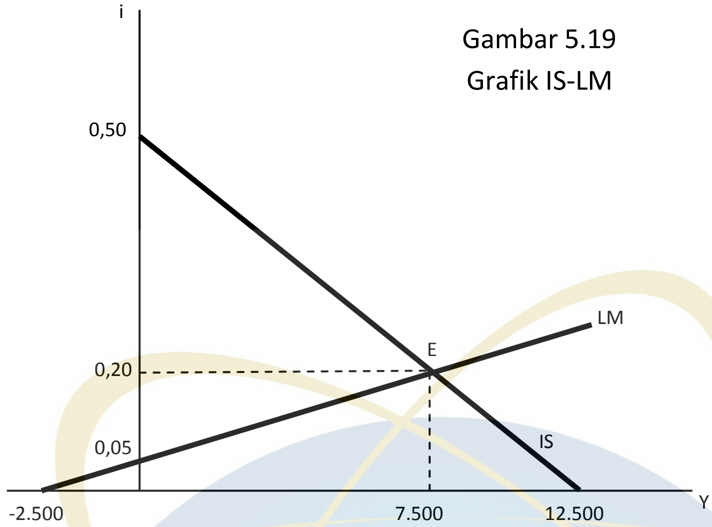
$Y = 12.500 - 25.000\,(0{,}20)$

$Y = 7.500$

LM → $Y = -2.500 + 50.000i$

$Y = -2.500 + 50.000\,(0{,}20)$

Y = 7.500




Gambar 5.19
Grafik IS-LM

## B. Fungsi Non-Linear

### 1. Permintaan, Penawaran dan Keseimbangan Pasar

**Permintaan**

➢ **Fungsi dan Kurva Permintaan Garis Tidak Lurus Parabola (Kuadrat)**

Pada suatu kurva permintaan garis tidak lurus (nonlinear) yang berbentuk parabola, fungsi permintaannya merupakan fungsi kuadrat. Bentuk umum dari fungsi permintaan yang kuadrat dari $x = f(p)$ adalah $x = ap^2 + bp + c$ di mana x adalah variabel kuantitas (yang merupakan variabel yang dicari) dan p adalah variabel harga ( yang merupakan variabel menentukan/*independent variable*). Sementara itu, a, b, dan c adalah konstanta. Dalam hal ini tingkat pertambahan/penurunan jumlah yang diminta diakibatkan oleh turun/naiknya harga barang tersebut tergantung pada tingkat harga (p) dan besarnya nilai a. Secara lebih tepat, dapatlah dikatakan bahwa tingkat pertambahan/penurunan jumlah yang diminta tergantung pada elastisitas permintaan barang tersebut.

Bentuk umum lain dari fungsi permintaan kuadrat $P = f(x)$ adalah $p = ax^2 + bx + c$. Bentuk umum ini mengikuti bentuk umum yang sering berlaku dalam matematika atau aljabar, yaitu $y = ax^2 + bx + c$. Dalam bentuk umum fungsi permintaan kuadrat ini, adalah variabel kuantitas/jumlah dan p adalah variabel harga, sedangkan a, b, dan c adalah konstanta. Besarnya tingkat pertambahan/penurunan harga sebagai akibat turun/naiknya jumlah yang diminta.

Tingkat pertambahan/penurunan ini tergantung pada elastisitas permintaan barang tersebut.

- **Fungsi dan Kurva Permintaan Garis Tidak Lurus Hiperbola (Fungsi Pecah)**

Pada suatu kurva permintaan garis tidak lurus (nonlinear) yang berbentuk hiperbola, fungsi permintaannya merupakan fungsi pecah. Bentuk umum sederhana dan dari fungsi permintaan yang berbentuk fungsi pecah adalah:

$$p = \frac{ax + b}{cx + d}$$

di mana x merupakan variabel kuantitas/jumlah dan p merupakan variabel harga. Selanjutnya, a, b, c, dan d adalah konstanta. Pada fungsi permintaan seperti ini, tingkat pertambahan/penurunan jumlah yang diminta merupakan akibat turun/naiknya harga barang tersebut. Hal ini tergantung pada angka elastisitas permintaan dan barang tersebut.

**Penawaran**

- **Fungsi dan Kurva Penawaran Garis Tidak Lurus Parabola (Kuadrat)**

Pada suatu kurva penawaran garis tidak lurus (nonlinear) yang berbentuk parabola, fungsi penawarannya merupakan fungsi kuadrat. Bentuk umum dari fungsi penawaran kuadrat dari x = f (p) adalah $x = ap^2 + bp + c$ dimana

x adalah variabel kuantitas (merupakan variabel yang dicari)

p adalah variabel harga (merupakan variabel yang menentukan/*independent variable*)

Dalam bentuk fungsi penawaran seperti ini, tingkat penambahan/penurunan jumlah yang ditawarkan diakibatkan oleh naik/turunnya harga barang. Hal ini tergantung pada saat tingkat harga (p) dan besarnya nilai a. Secara lebih tepat, dapat dikatakan bahwa tingkat pertambahan/penurunan jumlah yang ditawarkan tergantung pada elastisitas penawaran barang tersebut. Mengenai elastisitas akan diuraikan tersendiri dalam salah satu bagian pada bab ini nanti.

Bentuk umum yang lain dari fungsi penawaran yang kuadrat adalah p = f (x) yaitu $p = ax^2 + bx + c$. Dalam bentuk umum fungsi penawaran kuadrat, x adalah variabel kuantitatif dan p adalah variabel harga. Selanjutnya, a, b, dan c adalah konstanta. Besarnya tingkat pertambahan/penuruhan harga merupakan akibat pertambahan/penurunan jumlah yang diminta. Hal ini tergantung pada elastisitas penawaran dari barang tersebut.

➢ **Fungsi dan Kurva Penawaran Garis Tidak Lurus Hiperbola (Fungsi Pecah)**

Pada suatu kurva penawaran garis tidak lurus (nonlinear) yang berbentuk hiperbola, fungsi penawarannya merupakan fungsi pecah. Bentuk umum fungsi penawaran yang berbentuk fungsi pecah adalah:

$$p = \frac{ax + b}{cx + d}$$

di mana x merupakan variabel kuantitas/jumlah;
p merupakan variabel harga;
a, b, c, dan d adalah konstanta.

Pada fungsi penawaran seperti ini, besarnya tingkat pertambahan/penurunan jumlah yang ditawarkan merupakan akibat naik/turunnya harga barang tersebut. Hal ini tergantung pada angka elastisitas penawaran barang.

*Contoh:*

Apabila diketahui fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 19 - P^2$, sedangkan fungsi penawarannya $Q_s = -8 + 2P^2$. Berapakah harga dan kuantitas keseimbangan yang tercipta di pasar? Kemudian jika misalkan dikenakan pajak spesifik sebesar 1 rupiah per unit, bagaimanakah keseimbangan yang tercipta di pasar saat ini?

Jawab:

Keseimbangan terjadi pada saat permintaan sama dengan penawaran

$$Q_d = Q_s$$
$$19 - P^2 = -8 + 2P^2$$
$$3P^2 = 27$$
$$P^2 = 9$$
$$P = 3$$

Kemudian nilai P dimasukkan ke dalam salah satu persamaan $Q_d$ atau $Q_s$

$$Q_d = 19 - P^2$$
$$= 19 - (3)^2$$
$$Q_d = 10$$

Maka keseimbangan pasar tercipta pada tingkat harga 3 dan kuantitas 10.

Kemudian apabila pemerintah mengenakan pajak spesifik sebesar 1 per unit, maka persamaan penawarannya akan berubah menjadi

$$Q_s = -8 + 2(P - 1)^2$$
$$= -8 + 2(P^2 - 2P + 1)$$
$$= -6 - 4P + 2P^2$$

Keseimbangan pasar yang baru menjadi:

$$Q_d = Q_s$$
$$19 - P^2 = -6 - 4P + 2P^2$$
$$3P^2 - 4P - 25 = 0$$

Dengan menggunakan rumus abc diperoleh nilai $P_1$ = 3,63 dan nilai $P_2$ = -2,30. Karena $P_2$ irasional maka tidak digunakan.

Kemudian nilai P=3,63 dimasukkan ke dalam salah satu persamaan $Q_d$ atau $Q_s$

$$Q_d = 19 - P^2$$
$$= 19 - (3{,}63)^2$$
$$Q_d = 5{,}82$$

Beban pajak (tk) yang ditanggung oleh konsumen sebesar selisih antara harga setelah pajak dikurangi dengan harga sebelum pajak, yaitu tk = 3,63 – 3 = 0,63

Beban pajak (tp) yang ditanggung oleh produsen ialah sebesar nilai pajak yang dikenakan dikurangi dengan beban pajak yang ditanggung oleh konsumen, yaitu tp = 1 – 0,63 = 0,37

Sedangkan pajak yang diterima oleh pemerintah ialah besarnya pajak dikalikan kuantitas yang terjual, yaitu T = 1 x 5,82 = 5,82

## 2. Fungsi Biaya dan Penerimaan

### Fungsi Biaya

*Contoh:*

Apabila biaya total yang harus dikeluarkan oleh perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C = 2Q^2 - 24Q + 102$. Pada tingkat produksi berapakah unit biaya total ini minimum? Hitunglah besarnya biaya total minimum tersebut serta hitung pula berapa besarnya biaya tetap, biaya variabel, biaya rata-rata, biaya tetap rata-rata, dan biaya variabel rata-rata pada tingkat produksi tadi? Kemudian jika produksi ditambah sebesar 1 unit, berapa besarnya biaya marjinal?

Jawab:

Berdasarkan rumus titik ekstrim parabola, biaya minimum terjadi pada kedudukan $Q = -\frac{b}{2a} = \frac{24}{4} = 6\,unit$

Besarnya biaya minimum = $2Q^2 - 24Q + 102$

= $2(6)^2 - 24(6) + 102$

C = 30

Besarnya biaya tetap (FC) ialah sebesar 102, yaitu biaya yang tidak berubah-ubah berapapun besarnya produksi yang dilakukan oleh perusahaan.

Biaya variabel (VC), yaitu $2Q^2 - 24Q \rightarrow 2(6)^2 - 24(6) = -72$

Biaya rata-rata (AC) = C/Q → = 30/6 = 5

Biaya tetap rata-rata (AFC) = FC/Q → = 102/6 = 17

Biaya variabel rata-rata (AVC) = VC/Q → = -72/6 = -12

Kemudian jika Q dinaikkan 1 unit menjadi 7 unit, maka

Biaya marjinal (MC) $= \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{32-30}{7-6} = 2$

Berarti untuk menaikkan produksi dari 6 unit menjadi 7 unit diperlukan biaya tambahan (biaya marjinal) sebesar 2.

**Fungsi Penerimaan**

*Contoh:*

Jika fungsi permintaan yang dihadapi seorang produsen sebesar P = 900 – 1,5Q. bagaimanakah persamaan penerimaan totalnya? Kemudian berapa besarnya penerimaan jika produsen mampu menjual sebesar 200 unit, dan berapa harga jual per unit? Apabila terjadi kenaikan penjualan menjadi 250 unit, hitunglah penerimaan marjinal?

Jawab:

P = 900 – 1,5Q

TR = P x Q

= (900 – 1,5Q) x Q

= $900Q - 1{,}5Q^2$

Jika Q = 200 unit, maka

TR = $900(200) - 1{,}5(200)^2$

= 120.000

Maka penerimaan total yang mampu dihasilkan pada kondisi 200 unit ialah sebesar Rp 120.000,-

Harga jual per unit ialah

$P = 900 – 1,5Q$

$P = 900 – 1,5(200)$

$P = 600$

Harga jual barang per unit ialah Rp 600,-

Jika penjualan meningkat menjadi 250 unit, maka

TR $= 900\,Q – 1,5Q^2$

$= 900\,(250) – 1,5(250)^2$

$= 131.250$

Sehingga penerimaan marjinalnya ialah

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q} = \frac{131.250 - 120.000}{250 - 200}$$

$$MR = 225$$

Sehingga tambahan penerimaan marjinal jika produsen mampu meningkatkan penjualan dari 200 unit menjadi 250 unit ialah sebesar Rp 225,-

Kemudian tingkat penjualan yang mampu menghasilkan penerimaan total maksimum ialah:

TR maksimum pada Q = $-\frac{b}{2a} = -\frac{900}{2(-1,5)} = 300$

Besarnya TR maksimum menjadi:

TR $= 900\,Q – 1,5Q^2$

$= 900\,(300) – 1,5\,(300)^2$

TR $= 135.000$

*Contoh:*

Jika fungsi penerimaan total yang mampu dihasilkan oleh suatu perusahaan ditunjukkan dengan persamaan penerimaan total (TR) = $-\,0,10Q^2 + 20Q$, sedangkan biaya total yang harus dikeluarkan oleh perusahaan dalam proses produksinya ialah TC = $0,25Q^3 – 3Q^2 + 7Q + 20$.

Hitunglah keuntungan perusahaan ini jika dihasilkan dan terjual barang sebanyak 10 dan 20 unit?

Jawab:

Keuntungan ($\pi$) = TR – TC

$= (-0,10Q^2 + 20Q) – (0,25Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 20)$

$$= -0{,}10Q^2 + 20Q - 0{,}25Q^3 + 3Q^2 - 7Q - 20$$

$$\pi = -0{,}25Q^3 + 2{,}90Q^2 + 13Q - 20$$

Pada kuantitas Q = 10

$$\pi = -0{,}25Q^3 + 2{,}90Q^2 + 13Q - 20$$

$$= -0{,}25(10)^3 + 2{,}90(10)^2 + 13(10) - 20$$

$$= -250 + 290 + 130 - 20$$

$$= 150 \text{ (keuntungan)}$$

Perusahaan memperoleh keuntungan sebesar 150 pada saat memproduksi barang sebanyak 10 unit

Pada kuantitas Q = 20

$$\pi = -0{,}25Q^3 + 2{,}90Q^2 + 13Q - 20$$

$$= -0{,}25(20)^3 + 2{,}90(20)^2 + 13(20) - 20$$

$$= -2000 + 1160 + 260 - 20$$

$$= -600 \text{ (kerugian)}$$

Perusahaan menderita kerugian sebesar 600 pada saat memproduksi barang sebanyak 20 unit.

**Latihan:**

1. Jika diketahui, pada saat perusahaan menjual suatu produk pada tingkat harga Rp 60,-, jumlah permintaan atas barang tersebut sebanyak 100 unit. Kemudian terjadi kenaikan permintaan menjadi sebanyak 140 unit, dan pada saat ini produsen berusaha menaikkan harga menjadi Rp 75,-, maka tentukanlah persamaan penawarannya dan gambarkan grafiknya?
2. Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang ialah $P_d = 80 – 2Q$, dan fungsi penawarannya ialah $P_s = 20 + 4Q$, dan dikenakan subsidi terhadap barang tersebut sebesar $s = 6$. Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan sebelum dan sesudah diberikan subsidi oleh pemerintah? Serta hitunglah subsidi yang dinikmati oleh produsen dan konsumen serta besarnya subsidi yang diberikan oleh pemerintah? Gambarkan pula grafiknya?
3. Jika diketahui fungsi permintaan adalah $P_d = 100 – 5Q$ dan fungsi penawarannya ialah $P_s = 40 + 4Q$, dan dikenakan pajak spesifik sebesar 10, maka hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan sebelum dan sesudah dikenakan pajak oleh pemerintah? Serta hitunglah beban pajak yang ditanggung oleh produsen dan konsumen? Serta hitunglah penerimaan pajak yang diterima oleh pemerintah? Gambarkan pula grafiknya?
4. Jika suatu perusahaan harus mengeluarkan biaya tetap setiap bulan sebesar Rp 500.000,- dengan biaya variabel per unit output adalah 1000. Harga jual produk ialah sebesar Rp 6.000/unit. Hitunglah berapa besarnya kuantitas pada kondisi pulang-pokok dan berapa besarnya keuntungan pada saat mampu menjual sebesar 500 unit? Kemudian jika dikenakan pajak spesifik sebesar 500 per unit, berapa besarnya kuantitas setelah pajak?

# BAB 6
# LIMIT FUNGSI

## A. Pengertian Limit Fungsi

Aljabar kalkulus, yang berintikan teori tentang diferensiasi dan integrasi, berhubungan dengan perubahan-perubahan sangat kecil dalam variabel-variabel sebuah fungsi. Dikembangkan secara terpisah pada abad ketujuhbelas oleh *Sir Isaac Newton dan Gottfried Leibnitz.* Kalkulus pada awalnya digunakan untuk memecahkan masalah-masalah fisika, astronomi dan geometri. Dewasa ini kalkulus semakin meluas dimanfaatkan oleh berbagai bidang atau ilmu pengetahuan, termasuk ilmu ekonomi. Hal ini dilakukan mengingat analisis dalam bisnis dan ekonomi selalu berhubungan dengan faktor perubahan, kalkulus memainkan peranan penting sebagai salah satu alat analisisnya.

Diferensasi dan integrasi sesungguhnya merupakan dua operasi matematis yang saling berkebalikan. Pada intinya, diferensial (teori tentang diferensiasi) berkenaan dengan penentuan tingkat perubahan suatu fungsi, sedangkan integral (teori tentang integrasi) berkenaan dengan pembentukan persamaan suatu fungsi apabila tingkat perubahan fungsi yang bersangkutan diketahui. Teori tentang limit dan kesinambungan sebuah fungsi merupakan "akar" dari aljabar kalkulus. Oleh karenanya uraian mengenai kalkulus selalu diawali dengan bahasan tentang kedua hal ini. Meskipun konsep limit dan kesinambungan itu sendiri mungkin terasa relatif lebih canggih (*sophisticated)* dibandingkan dengan konsep diferensial dan integralnya (yang merupakan inti kalkulus)

Konsep-konsep dalam bentuk limit, sering kali digunakan baik dalam pemikiran yang nonmatematis maupun dalam aktivitas kehidupan keseharian. Konsep dalam bentuk limit dimaksudkan sebagai pola pendekatan terhadap nilai-nilai batas yang ditentukan (tidak sama persis, tetapi hanya mendekati saja), misalnya produksi maksimum teoritis dari sebuah mesin adalah suatu limit, takaran bahan bakar untuk setiap kilometer yang dibutuhkan oleh suatu kendaraan bermotor, kecepatan laju suatu kendaraan, kecepatan rata-rata kendaraan bermotor, dan lainnya.

Ada beberapa pengertian mengenai istilah limit itu sendiri, seperti *limit kiri* dan *limit kanan*. Artinya, bahwa dengan adanya pernyataan itu konsep pendekatannya dinyatakan dari kiri dan/atau dari kanan. Sebagai gambaran, konsep pendekatan dari kiri terhadap besaran angka 2 adalah: 1,9999…, dan konsep pendekatan dari kanan terhadap besaran angka 2 tersebut adalah: 2,0000001 dan seterusnya.

Untuk menggambarkan seberapa jauh sebuah fungsi akan berkembang apabila variabel di dalam fungsi yang bersangkutan terus menerus berkembang mendekati suatu nilai tertentu digunakanlah limit. Sebagai contoh : dari y dan f(x) akan dapat diketahui limit atau batas perkembangan f (x) ini apabila variabel x terus menerus berkembang hingga mendekati suatu nilai tertentu.

Limit dapat didefinisikan sebagai: Untuk suatu fungsi f(x) diandaikan sebuah peubah bebas x diasumsikan mempunyai nilai tertentu yang mendekati a, maka fungsi f(x) dapat dianggap berhubungan dengan suatu himpunan nilai. Seandainya pada saat x mendekati a, nilai yang sesuai bagi f(x) mendekati suatu konstanta A, dan seandainya pula bahwa nilai f(x) dapat dijadikan berbeda sedikit secara arbiter dari A dengan mengambil nilai x yang mendekati a, tetapi tidak sama dengan a, maka hal ini benar untuk semua nilai x. Dan artinya f(x) dikatakan sebagai suatu konsep pendekatan dari a atau limit a jika x mendekati a.

Secara singkat definisi limit dari suatu peubah atau limit dari suatu fungsi adalah: Suatu peubah x dikatakan mendekati bilangan konstanta merupakan limit, apabila x berubah-ubah sedemikian rupa sehingga selisih absolut (x – a), terjadi dan tetap lebih kecil daripada jumlah positif yang ditentukan lebih dahulu, tetapi nilai yang lebih kecil akan dipilih, hal ini ditunjukan oleh notasi: $\lim_{x \to a} x = a$ (baca: *limit x di mana x mendekati a).*

Dua hal perlu diperhatikan dalam notasi atau pernyataan limit di atas. *Pertama*, x → a harus dibaca serta ditafsirkan sebagai x mendekati a, dan bukan berarti x = a. *Kedua*, lim f(x) = L harus dibaca serta ditafsirkan bahwa L adalah limit fungsi f(x), dan bukan berarti L adalah nilai fungsi f(x).

Contoh praktis berikut ini akan menjelaskan bagaimana bekerjanya teori limit dan apa sesungguhnya yang dimaksud dengan limit.

Andaikan $y = f(x) = 1 - 2x^2$

Maka $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (1 - 2x^2) = -7$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x)(1 - 2x^2) = -17$

Perhatikan perkembangan fungsi f(x) untuk perkembangan variabel x sebagaimana tercermin di dalam tabel berikut:

| $x$ | $f(x) = 1 - 2x^2$ |
|---|---|
| 3,50 | $1 - 2(3,50)^2 = -23,5$ |
| 3,10 | $1 - 2(3,10)^2 = -18,22$ |
| 3,05 | $1 - 2(3,05)^2 = -17,605$ |
| 3,01 | $1 - 2(3,01)^2 = -17,1202$ |
| 2,99 | $1 - 2(2,99)^2 = -16,8802$ |
| 2,95 | $1 - 2(2,95)^2 = -16,405$ |
| 2,90 | $1 - 2(2,90)^2 = -15,82$ |
| 2,50 | $1 - 2(2,50)^2 = -11,5$ |
| 2,10 | $1 - 2(2,10)^2 = -7,82$ |
| 2,05 | $1 - 2(2,05)^2 = -7,405$ |
| 2,01 | $1 - 2(2,01)^2 = -7,0802$ |
| 1,99 | $1 - 2(2,99)^2 = -6,9202$ |
| 1,95 | $1 - 2(2,95)^2 = -6,605$ |
| 1,90 | $1 - 2(2,90)^2 = -6,22$ |
| 1,50 | $1 - 2(2,50)^2 = -3,5$ |
| 1 | $1 - 2(2,1)^2 = -0,1$ |

Dari tabel di atas memperlihatkan bahwa jika x bergerak mendekati 2 ( baik dari x = 1 lalu menaik, maupun dari x = 3,50 lalu menurun), maka f(x) akan mendekati nilai -7. Sedangkan jika x bergerak mendekati 3 maka f(x) akan berkembang mendekati nilai -17.

Pada contoh di atas variabel bergerak mendekati nilai-nilai positif tertentu, yakni 2 dan 3. Limit sebuah fungsi dapat pula dianalisis untuk perkembangan variabel yang menuju nilai-nilai negatif tertentu, menuju 0, bahkan menuju + ∞ dan – ∞. Dengan demikian, untuk setiap fungsi f(x) kita dapat menganalisis lim f(x) untuk $x \to +a,\ x \to -a,\ x \to 0,\ x \to +\infty$ dan $x \to -\infty$. Seiring dengan itu dapat pula terjadi (untuk x mendekati sembarang nilai tertentu) lim f(x) = + L, lim f(x) = -L, lim f(x) = 0, f(x) = + ∞ atau lim f(x) = – ∞. Limit sesuatu fungsi hanya mempunyai dua kemungkinan: ada (terdefinisi, tertentu; yakni jika limitnya adalah L, atau –L, atau 0, atau ∞ atau – ∞) atau tidak ada sama sekali (tidak terdefinisi), dan tidak boleh tak tentu.

*Contoh:*

1) $\lim_{x \to 2} (1 - 2x^2) = -7$
2) $\lim_{x \to 0} (1 - 2x^2) = 1$
3) $\lim_{x \to +\infty} (1 - 2x^2) = -\infty$
4) $\lim_{x \to -\infty} (1 - 2x^2) = -\infty$

Analisis mengenai limit sesuatu fungsi sesungguhnya dipilah menjadi dua bagian, tergantung pada sisi mana kita melihat gerakan perkembangan variabelnya. Apabila kita menganalisis $\lim_{x \to a} f(x)$ dari nilai-nilai x yang lebih kecil daripada a (dari x < a), berarti kita melihatnya dari sisi kiri. Sebaliknya jika kita menganalisis $\lim_{x \to a} f(x)$ dari nilai-nilai x yang lebih besar daripada a (dari x > a), berarti kita melihatnya dari sisi kanan. Jadi,

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

terdiri atas

$\lim_{x \to a^-} f(x)$

(analisis sisi kiri)
$x \to a$ dilihat dari nilai-nilai $x < a$

$\lim_{x \to a^+} f(x)$

(analisis sisi kanan)
$x \to a$ dilihat dari nilai-nilai $x > a$

Limit sisi-kiri dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang membesar ($x \to a$ dari sisi-kiri, melalui nilai-nilai $x < a$. Jadi, jika:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L^-$$

berarti $L^-$ merupakan limit sisi-kiri dari f(x) untuk $x \to a$

Untuk sisi-kanan dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang mengecil ($x \to a$ dari sisi kanan, melalui nilai-nilai $x > a$). Jadi, jika

$$\lim_{x \to a} f(x) = L^+$$

berarti $L^+$ merupakan limit sisi-kiri dari f(x) untuk $x \to a$

Limit sebuah fungsi dikatakan ada jika dan hanya jika limit sisi-kiri dan limit sisi-kanannya ada serta sama. Dalam kasus semacam ini

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Apabila salah satu dari ketentuan-ketentuan di atas tidak terpenuhi, maka limit dari fungsi yang bersangkutan tidak terdefinisi. Dengan demikian limit sebuah fungsi dikatakan tidak ada jika limit salah satu sisinya tidak ada, atau limit kedua sisinya tidak ada, atau limit kedua sisinya ada tetapi tidak sama.

Konsep limit, yang secara matematik terasa samar-samar, sebenarnya bukanlah sesuatu yang abstrak. Dalam kehidupan bisnis dan ekonomi sehari-hari, konsep ini cukup sering diterapkan. Ia menggambarkan batas ideal tertentu (maksimum dan minimum) yang dapat atau harus dipenuhi, dalam kondisi yang juga ideal. Ambillah sebagai contoh tingkat upah minimum. Ini menggambarkan batas upah minimum yang ideal ini tidak harus dipenuhi. Kalaupun dalam kenyataan tingkat upah minimum yang ideal ini tidak terpenuhi, karena kondisi ideal yang mendukungnya tidak memadai, namun setidak-tidaknya upah minimum yang berlangsung akan berkisar di tingkat ideal yang diharapkan (sedikit di atasnya atau sedikit di bawahnya). Gambaran mengenai batas ideal ini dapat pula kita temui dalam hal kapasitas produksi (maksimum), profit (maksimum), biaya (minimum) dan sebagainya.

## B. Kaidah-kaidah Limit

1. Jika $y = f(x) = x^n \; dan \; n > 0, maka$ $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

   Contoh:

   - $\lim_{x \to 2} x^4 = 2^4 = 16$
   - $\lim_{x \to 4} x^3 = 4^3 = 64$

2. Limit dari suatu konstanta adalah konstanta itu sendiri.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Contoh:

➢ $\lim_{x \to 1} 10 = 10$

➢ $\lim_{x \to 2} 5 = 5$

3. Limit dari suatu penjumlahan (pengurangan) fungsi adalah jumlah (selisih) dari limit fungsi-fungsinya.

$$\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a}\{f(x) \pm\} = \lim_{x \to a} g(x)$$

Contoh:

➢ $\lim_{x\to 1}(3x + 4x) = \lim_{x\to 1} 3x + \lim_{x\to 1} 4x$

= 2.1 + 3.1

= 5

➢ $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3x) = \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x$

= $2(2)^2 - 3(2)$

= 2

4. Limit dari suatu perkalian fungsi adalah perkalian dari limit fungsi-fungsinya.

$$\lim_{x \to a}\{f(x)\ \ g(x)\} = \lim_{x \to a} \mathrm{f(x)}\ .\ \lim_{x \to a} g(x)$$

Contoh:

➢ $\lim_{x \to 2} 4x(2x + 3) = \lim_{x \to 2} 4\mathrm{x}\ .\ \lim_{x \to 2} 2x + 3$

= (4.2) . (2(2) + 3)

= 56

➢ $\lim_{x \to 1} x^3(3x - 2) = \lim_{x \to 1} x^3\ .\ \lim_{x \to 1}(3x + 2)$

= $(1)^3$ . [3(1) + 2]

= 5

5. Limit dari perkalian konstanta dengan fungsi adalah perkalian antra konstanta dengan limit dari fungsi

$$\lim_{x\to a} k.\{f(x)\} = k. \lim_{x\to a} f(x) = k. A$$

Contoh:

- $\lim_{x\to 2} 4.(2x+3) = 4.\lim_{x\to 2}(2x+3)$
  $= 4.\{2(2)+3\} = 28$
- $\lim_{x\to 1} 5.(8x^2) = 5.\lim_{x\to 1}(8x^2)$
  $= 5.\{8.(1)^2\}$
  $= 40$

6. Limit dari suatu pembagian fungsi adalah pembagian dari limit fungsi-fungsinya, dengan syarat limit fungsi pembagian tidak sama dengan nol.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \text{ dengan syarat } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

*Contoh:* $\lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)}{(x-5)} = \frac{\lim_{x\to 5}(x^2-25)}{\lim_{x\to 5}(x-5)}$

$$= \frac{\lim_{x\to 5}(x-5)(x+5)}{\lim_{x\to 5}(x-5)} = \lim_{x\to a}(x+5) = 10$$

7. Limit dari suatu fungsi berpangkat n adalah pangkat n dari limit fungsinya.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^n = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}^n$$

Contoh:

- $\lim_{x\to 2}(2x+3)^2 = \{\lim_{x\to 2}(2x+3)\}^2$
  $= \{2(2)+3\}^2 = 49$
- $\lim_{x\to 3}(5x)^2 = \{\lim_{x\to 3}(5x)\}^2$
  $= (5(3))^2 = 225$

8. Limit dari suatu fungsi terakar berpangkat positif adalah akar dari limit fungsinya. $\lim_{x\to a}\{\sqrt[n]{f(x)}\} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ $\quad n > 0$

Contoh:

- $\lim_{x\to 2}\sqrt{(2x+1)^2} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(2x+1)^2}$
  $= \sqrt{(2(2)+1)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{(x-2)}{(x^2-4)}} = \sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}}$
  $= \sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

9. Dua buah fungsi yang serupa mempunyai limit yang sama. Jika f(x) = g(x) untuk semua nilai x≠ a dan lim f(x) = L, maka $\lim_{x \to a} g(x) = L$ juga

## C. Fungsi Limit Pecah

Dalam menentukan solusi dari suatu limit fungsi pecah, pada prinsipnya adalah sama dengan menentukan nilai pada limit fungsi biasa, yaitu melakukan substitusi harga x terhadap variabel x yang ada pada fungsi pecahnya. Jika setelahnya disubstitusi ternyata hasilnya riil (nyata), maka nilai tersebut adalah merupakan hasil akhirnya, namun demikian apabila setelah disubstitusikan hasilnya terjadi pembagian dengan 0 (nol). Maka hal tersebut harus dilakukan proses penyelesaian yang berbeda dengan proses penyelesaian pada limit fungsi lainnya. Hal ini lebih karena adanya ketentuan yang tidak membolehkan terjadinya pembagian dengan nol.

Untuk mendapatkan penyelesaian akhir atau cara menyelesaikan model limit fungsi (setelah dilakukan substitusi harga x terhadap fungsinya dan terjadi pembagian dengan nol), perhatikan fungsi pembilang dan fungsi penyebutnya, tentukan derivatif (turunan) dari fungsi pembilang dan penyebutnya terhadap x, kemudian substitusikan harga x yang didekati terhadap fungsi-fungsi derivatif dari pembilang dan penyebutnya, apabila harga x yang didekati setelah disubstitusikan terhadap fungsi derivatif pembilang dan penyebutnya masih terjadi pembagian dengan nol, maka hasilnya adalah merupakan harga yang *infinite* (sebagai hasil akhir).

*Contoh:*

- $\lim_{x\to 2} \frac{(2x^3+3x-8)}{(5x+6)} = \frac{(2(2)^3+3(2)-8}{(5(2)+6)} = \frac{14}{16}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{(2x^3+3x-2)}{(3x-3)} = \frac{(2(1)^3+3(1)-2}{(3(1)-3)} = \frac{3}{0}\ (infinite)$

Oleh karena setelah dilakukan subtitusi terhadap harga x yang didekati terjadi pembagian dengan nol, maka langkah berikutnya adalah menentukan derivative dari fungsi pembilang dan fungsi penyebutnya, sebagai berikut:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(6x^2+3)}{(3)} = \frac{(6(1)^2+3}{(3)} = \frac{9}{3} = 3$$

## D. Penyelesaian Kasus Khusus

Dalam sub-bab pengertian limit ditegaskan bahwa limit sesuatu fungsi tidak boleh taktentu. Ini berarti penentuan limit sesuatu fungsi tidak boleh membuahkan hasil berbentuk 0/0 atau $\infty/\infty$. Sub-bab ini akan membahas kaidah-kaidah khusus yang dapat diterapkan guna menghindari hasil berbentuk tak tentu tersebut.

### 1. Bentuk tak tentu 0/0

Perhatikan tentang kaidah tentang limit pembagian fungsi

Misalkan y = f(x)/g(x) = $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$. Kemudian jika terhadap limit fungsi $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$ untuk taktentu menghasilkan 0/0. Hal ini disebabkan karena fungsi y = $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$ = 0/0 jika x =5. Sehubungan dengan itu kita senantiasa harus waspada bahwa x → 5 bukanlah berarti x = 5.

Selanjutnya perhatikan : jika x ≠ 5 maka y ≠ 0/0, kedua pembilang ($x^2$ – 25) dan penyebut (x – 5) dapat dibagi dengan (x – 5), sehingga y = $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$ dapat diuraikan menjadi y = (x – 5)(x + 5)/(x – 5) = (x + 5).

Mengingat x → 5 adalah x ≠ 5, maka lim $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$ untuk x → 5 dapat diuraikan seperti di atas dan tersederhana menjadi hanya lim (x + 5) untuk setiap x → 5. Jadi, limit yang menghasilkan bentuk taktentu 0/0 dapat dihindari dengan cara mengurai-sederhanakan fungsinya.

Misalkan fungsi y = $\frac{(x-2)}{(x^2-4)}$. Kemudian jika terhadap limit fungsi $\frac{(x-2)}{(x^2-4)}$ untuk taktentu menghasilkan 0/0. Hal ini disebabkan karena fungsi $\frac{(x-2)}{(x^2-4)}$ = 0/0 untuk nilai x = 2. Sehingga fungsi y = $\frac{(x-2)}{(x^2-4)}$ dapat diuraikan menjadi $\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}$, setelah disederhanakan menjadi hanya lim $\frac{1}{(x+2)}$. Jadi limit yang menghasilkan bentuk taktentu 0/0 dapat dihindari dengan menguraikan fungsinya. Hal ini sama dengan contoh limit pecah sebelumnya.

Misalkan $f(x) = \frac{(x-\ 3^2)-9}{(x)}$. Berapa lim f(x) untuk x → 0. Substitusi langsung x = 0 ke dalam lim f(x) untuk x → 0 akan menghasilkan bentuk tak tentu 0/0 jika x = 0. Namun jika x ≠ 0, f(x) ≠ 0/0 dan dapat diurai-sederhanakan menjadi f(x) = $\frac{(x^2-6x+9-9)}{(x)} = \frac{(x^2-6x)}{x}$ = x – 6.

Dengan demikian

$$\lim_{x \to 0}[\left(x-3\right)^2 - 9\}/x] \quad = \lim_{x \to 0}(x-6) = -6$$

## 2. Bentuk tak tentu ~ / ~

Bentuk taktentu ~ / ~ dapat terjadi dalam kasus penentuan limit pembagian fungsi [katakanlah lim{*f(x)/g(x)*}] untuk variabel *x* →’. Hasil ~ / ~, yang potensial untuk terjadi, dapat dihindari dengan cara membagi pembilang dan penyebutnya dengan variabel berpangkat tertinggi pada penyebut.

*Contoh:*

- Misalkan y(x) = f(x)/g(x) = $(4x^5 + x^2)/(3x^6 + 7x^3)$ dan kita ingin mengetahui limit y(x) untuk x → ~

  Dengan membagi pembilang dan penyebut dengan $x^6$, akan diperoleh

$$\lim_{x \to \sim} \frac{4x^5 + x^2}{3x^6 + 7x^3} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}}{3 + \frac{7}{x^3}}$$

$$= \frac{0+0}{3+0} = 0$$

- $\lim_{x \to \sim} \frac{6x^3 + x^2 + 9}{2x^3 + 5x^2 - 4} = \lim_{x \to \sim} \frac{6 + \frac{1}{x} + \frac{9}{x^3}}{2 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^3}}$

$$= \frac{6+0+0}{2+0+0} = 3$$

## 3. Limit Tak Hingga (*Infinite*)

Suatu limit dikatakan limit tak hingga (*limit infinite*) jika di depan limitnya merupakan fungsi pecah dan x didekati oleh bilangan tak terhingga (~).

Didefinisikan:

$$\lim_{x \to \sim} \frac{1}{X} = 0 \; dan \; \lim_{x \to 0} \frac{1}{X} = \sim$$

Untuk menyelesaikan model limit *infinite* ini, perhatikan pangkat (derajat) tertinggi dari fungsi pembilang dan pangkat (derajat) dari fungsi penyebutnya, kemudian bagilah dengan pangkat (derajat) tertinggi dari fungsi penyebutnya. Ada berbagai model dari limit fungsi *infinitei* seperti:

- Pangkat fungsi pembilang sama dengan (=) pangkat fungsi penyebut
- Pangkat fungsi pembilang lebih besar (>) pangkat fungsi penyebut
- Pangkat fungsi pembilang lebih kecil (<) pangkat fungsi penyebut

➢ **Pangkat Fungsi Pembilang Sama Dengan Pangkat Fungsi Penyebut**

Jika pangkat (derajat) tertinggi dan fungsi pembilang sama dengan pangkat tertinggi dari fungsi penyebutnya, maka penyelesaian dari limit fungsi tersebut adalah merupakan hasil bagi antara koefisien pangkat tertinggi dari fungsi pembilang dan pangkat tertinggi fungsi penyebutnya, adapun langkah penyelesaikan kasus tersebut seperti contoh berikut ini.

Contoh:

$$\lim_{x\to\sim}\frac{(16x^2+4)}{(15x^2-10x)} = \lim_{x\to\sim}\frac{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{15x^2}{x^2}-\frac{10x}{x^2}}$$

$$= \frac{16+0}{15-0} = \frac{16}{15}$$

Keterangan:

Pangkat tertinggi pembilang sama dengan pangkat tertinggi penyebutnya, yaitu = 2, maka solusinya adalah hasil bagi koefisien dari pembilang dan penyebut yang mempunyai pangkat tertinggi yaitu $(\frac{16}{15})$.

➢ **Pangkat Fungsi Pembilang Lebih besar dari Pangkat Fungsi Penyebut**

Jika pangkat (derajat) tertinggi dari fungsi pembilang lebih besar dari pangkat tertinggi dari fungsi penyebutnya, maka penyelesaian dari limit fungsi tersebut bernilai *infinite* (~) seperti pada contoh di bawah ini:

*Contoh:*

$$\lim_{x\to\sim}\frac{(16x^3+5x^2+4x)}{(10x^2-6x)} = \lim_{x\to\sim}\frac{\frac{16x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}}$$

$$= \frac{16x+4-\frac{3}{\sim}}{15-\frac{10}{\sim}} = \frac{16(\sim)+4-0}{15-0} = \sim$$

➢ **Pangkat Fungsi Pembilang Lebih Kecil dari Pangkat Fungsi Penyebut**

Jika pangkat (derajat) tertinggi dari fungsi pembilang lebih kecil dari pangkat tertinggi dari fungsi penyebutnya, maka solusi dari limit fungsi tersebut akan bernilai nol.

*Contoh:*

$$\lim_{x \to \sim} \frac{(16x^2 + 5x - 2)}{(10x^3 - 6x)} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{16x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{2}{x^3}}{\frac{10x^3}{x^3} - \frac{6x}{x^3}}$$

$$= \frac{\frac{16}{\sim} + \frac{5}{\sim} - \frac{2}{\sim}}{10 - \frac{6x}{x^3}} = \frac{0+0-0}{15-0} = 0$$

Terdapat cara lain yang lebih singkat dalam menentukan lim{*f(x)/g(x)*} untuk $x \rightarrow \sim$. Penyelesaian pintas ini dilakukan dengan cara memperbandingkan suku-suku berpangkat tertinggi pada pembilang dan penyebut.

Jika $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{n} b_j x^j}$

di mana *f(x)* dan *g(x)* masing-masing merupakan fungsi polinom berderajat *m* dan berderajat *n*,

maka

$$\lim_{x \to \infty} y(x) \begin{cases} = 0 & \text{dalam hal } m < n \\ = a_m/b_n & \text{dalam hal } m = n \\ = +\sim & \text{dalam hal } m < n \text{ dan } a_m > 0 \\ = -\sim & \text{dalam hal } m < n \text{ dan } a_m < 0 \end{cases}$$

*Perhatian:* Kaidah ini berlaku hanya jika *y(x)* merupakan fungsi pembagian dan limitnya ditentukan untuk $x \rightarrow \sim$

*Contoh:*

- $y(x) = (4x^5 + x^2)/(3x^6 + 7x^3)$ merupakan sebuah fungsi pembagian, dimana $m = 5$, $n = 6$, $a_m = 4$ dan $b_n = 3$.

  Karena m < n, maka $\lim_{y \to \sim} y(x) = 0$

- Tentukan limit y(x) untuk x → ~ jika $y(x) = (6x^3 + x^2 + 9)/(2x^3 + 5x^2 – 4)$, dimana m =3, n = 3, $a_m = 6$, dan $b_n = 2$.

  Karena m = n, maka $\lim_{y\to\sim} y(x) = \frac{a_m}{b_n} = \frac{6}{2} = 3$

## E. Kesinambungan

Perihal kesinambungan dan ketidaksinambungan fungsi merupakan konsep dasar penting dalam kalkulus. Konsep kesinambungan bertalian erat dengan konsep limit. Secara visual, sebuah fungsi dikatakan sinambung (*continous*) apabila gambarnya berupa sebuah kurva yang tidak terputus; yakni jika dalam menggambarkan kurva tersebut kita tidak perlu mengangkat alat tulis, melainkan cukup dengan menggeserkannya ke arah yang bersesuaian. Apabila dalam melanjutkan penggambaran kurva sebuah fungsi kita terpaksa harus mengangkat alat tulis pada titik tertentu, maka fungsi yang bersangkutan dikatakan asinambung (*discontinous*) atau terputus pada titik tersebut.

Dalam uraian-uraian sebelum ini telah ditegaskan bahwa *lim f(x)* untuk $x \to a$ bukanlah berarti *f(x)* pada $x = a$. Dalam menentukan *lim (x)* untuk $x \to a$, kita tidak menetapkan berapa nilai *f(x)* pada $x = a$. Dengan perkataan lain, limit tersebut sesungguhnya ditentukan oleh nilai-nilai *f(x)* di sekitar (yang berdekatan dengan) $x = a$, tetapi bukan oleh nilai *f(x)* pada $x = a$ itu sendiri. Limit fungsi *f(x)* untuk $x \to a$ dapat sama dan dapat pula tidak sama dengan *f(a)*. Apabila *lim f(x)* untuk $x \to a$ terdefinisi, dan *f(x)* pada $x = a$ [atau *f(a)*] juga terdefinisi serta sama dengan *lim f(x)* untuk $x \to a$, maka fungsi *f(x)* dikatakan sinambung pada titik di mana $x = a$. Jadi,

Sebuah fungsi *f(x)* dikatakan sinambung pada $x = a$ jika

1. *f(a)* terdefinisi
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ terdefinisi
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Fungsi *f(x)* dikatakan sinambung dalam suatu interval $b \leq x \leq c$ (atau interval $b < x < c$) jika ia sinambung pada setiap titik di dalam interval tersebut.

Fungsi *f(x)* yang tidak sinambung pada suatu titik di mana $x = a$ dikatakan asinambung pada $x = a$.

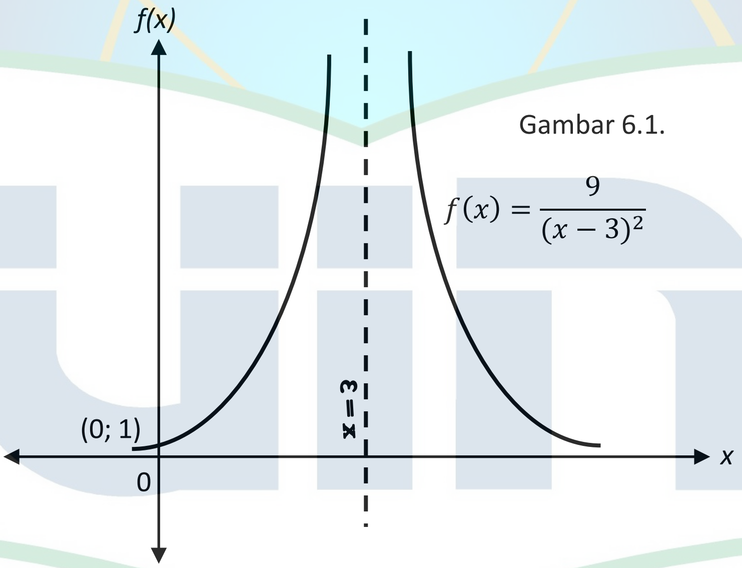
Ketidaksinambungan sebuah fungsi dapat berbentuk salah satu dari tiga kemungkinan : asinambung tak terhingga, asinambung berhingga dan asinambung titik. Secara geometri, penampilan kurva dari fungsi-fungsi yang berlainan bentuk ketidaksinambungan ini sangat berbeda.

Fungsi *f(x)* dikatakan asinambung tak terhingga pada $x = a$ jika *f(x)* menjadi (positif atau negatif) tak berhingga pada $x = a$ mendekati $x = a$ sebagai sebuah asimtot.

*Contoh:*

Fungsi $f(x) = 9/(x - 3)^2$ asinambung tak terhingga pada $x = 3$ sebab $f(3)$ dan *lim* *f(x)* untuk $x \to 3$ tidak terdefinisi; dalam hal ini $f(3) = \sim$ dan $\lim_{x \to 3} f(x) = \sim$

Fungsi ini sinambung pada semua nilai $x$ selain $x = 3$. Kurvanya asimtotik pada $x = 3$ (lihat gambar).




Gambar 6.1.

Fungsi *f(x)* dikatakan asinambung berhingga pada $x = a$ jika *f(x)* terdefinisi tapi berubah secara drastik *x a;* yakni jika *f(a)* terdefinisi dan *lim f(x)* untuk $x \to a$ tidak terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung berhingga pada $x = a$ mempunyai dua macam nilai *f(a)* untuk $x \to a$ yakni limit masing-masing sisinya.

*Contoh:*

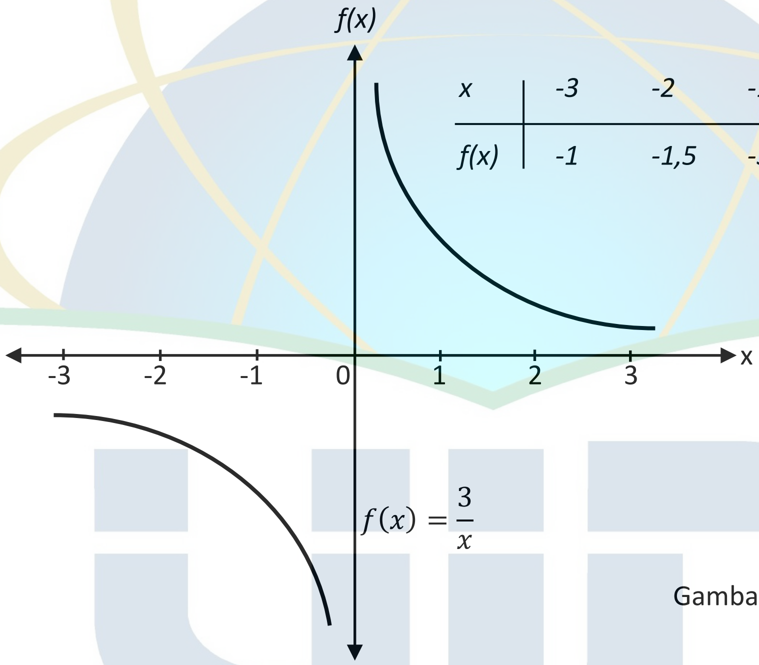
Fungsi $f(x) = 3/x$ asinambung berhingga pada $x = 0$ sebab *f(x)* terdefinisi tapi berubah secara drastik pada $x = 0$, karena *lim f(x)* untuk $x \to 0$ tidak terdefinisi.

$f(0) = \frac{3}{0} = \sim$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(3/x) = -\sim \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(3/x) = +\sim \end{array}\right\}$$

Karena limit sisi-kiri ≠ limit sisi-kanan maka $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ tidak terdefinisi

Amati gambar di bawah ini; *f(x)* menuju – ~ untuk *x* ⟶ 0 dari sisi-kiri, tetapi menuju + ~ untuk *x* ⟶ 0 dari sisi kanan terdapat perubahan drastis nilai *f(x)* pada *x* = 0.




| *x* | *-3* | *-2* | *-1* | *0* | *1* | *2* | *3* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | *-1* | *-1,5* | *-3* | *∞* | *3* | *1,5* | *1* |

Gambar 6.2.

Ciri khas dari fungsi yang memiliki ketidaksinambungan berhingga (*finite discountinuity*) adalah bahwa nilai fungsinya sama dengan limit salah satu sisinya.

Fungsi *f(x)* dikatakan asinambung titik pada *x* = *a* jika *f(a)* tidak terdefinisi tapi *lim f(x)* untuk *x* ⟶ *a* terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung titik pada *x* = *a* tampak seakan-akan sinambung, namun sesungguhnya terputus karena pada *x* = *a* tersebut *f(x)* tidak terdefinisi. Titik di mana *f(x)* tidak terdefinisi dinamakan "titik-yang hilang" dalam fungsi yang bersangkutan.

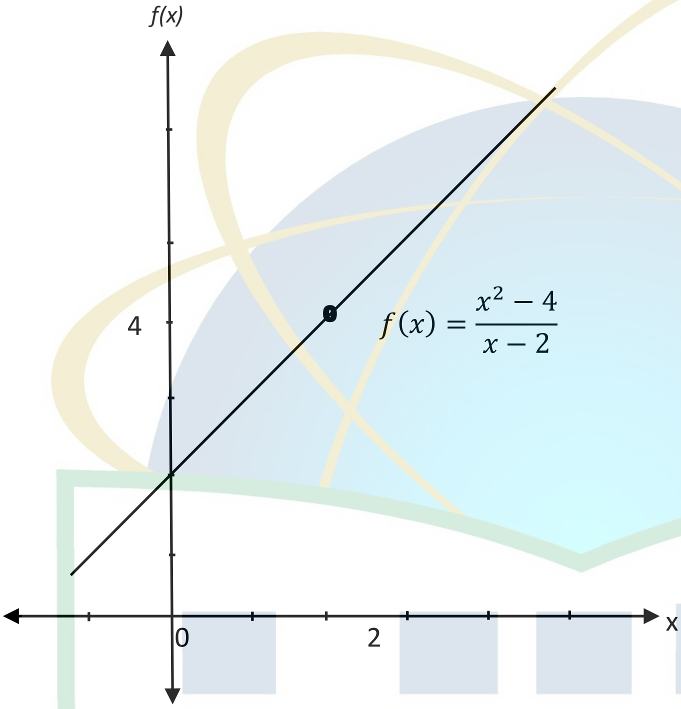
*Contoh:*

1) Fungsi $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ asinambung titik pada $x = 2$ sebab $f(2)$ tidak terdefinisi tapi *lim* $f(x)$ untuk $x \to 2$ terdefinisi.

   $f(2) = (4 - 4)/(2 - 2) = 0/0$ = tak terdefinisi. Akan tetapi untuk $x \neq 2$, $f(x)$ bisa disederhanakan menjadi

   $f(x) = (x + 2)(x - 2) = (x + 2)$ sehingga

   $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$




Gambar 6.3.

   Kurva dari fungsi $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ tak lain garis lurus (x + 2). Perhatikan gambar di atas, kurva $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ terputus pada kedudukan $x = 2$. Hal ini disebabkan karena tidak terdefinisinya $f(2)$. Titik (2, 4) merupakan titik-yang hilang dalam $f(x) = f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$.

2) Fungsi $f(x) = (2x^2 - 32)/(x + 4)$ asinambung titik pada $x = -4$ sebab $f(-4)$ tidak terdefinisi tapi *lim* $f(x)$ untuk $x \to -4$ terdefinisi.

   $f(-4) = (32 - 32)/(-4 + 4)$ = tak terdefinisi. Akan tetapi untuk $x \neq -4$, $f(x)$ bisa disederhanakan menjadi $f(x) = (2x - 8)(x + 4) = (2x - 8)$.

   $\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4,} f(x) \ \frac{(2^x - 32)}{(x+4} = \lim_{x \to -4} \frac{(2x-8)(x+4)}{(x+4)} = -16$

   Kurva dari fungsi $f(x) = 2x^2 - 32)/(x + 4)$ tak lain adalah garis lurus (2x – 8) dengan titik (– 4, – 16) sebagai titik-yang-hilang.

## F. Penerapan Ekonomi

Fungsi-fungsi dalam bisnis dan ekonomi banyak yang berbentuk fungsi asinambung. Bahkan sesungguhnya sebagian besar dari fungsi yang ada merupakan fungsi asinambung, terutama fungsi permintaan dan fungsi penawaran untuk jenis-jenis barang tertentu yang unit atau satuannya selalu diskrit (berupa bilangan bulat, tidak mungkin dipecah-pecah). Begitu pula fungsi biaya dan fungsi penerimaanya.

Penyinambungan fungsi-fungsi yang sesungguhnya asinambung atau diskrit memungkinkannya untuk ditelaah dengan berbagai alat analisis matematik. Namun demikian, dalam menafsirkan hasil analisisnya, kita harus senantiasa mengingat ketidaksinambungan yang tersirat. Sebagai contoh : meskipun secara matematik kita dapat menunjukkan berapa biaya untuk memproduksi 234,6 unit mobil, secara ekonomi yang harus kita permasalahkan adalah biaya untuk memproduksi 234 (atau 235) unit mobil.

*Contoh:*

Misalkan pemerintah menetapkan suatu sistem pajak-pendapatan progresif dengan ketentuan sebagai berikut:

10% terhadap pendapatan di bawah Rp 3 juta per bulan (Rp 36 juta per tahun)

15% terhadap pendapatan antara Rp 3 juta – Rp 6 juta per bulan (antara Rp 36 juta – Rp 72 juta per tahun

25% terhadap pendapatan melebih Rp 6 juta per bulan (> Rp 72 juta per tahun)

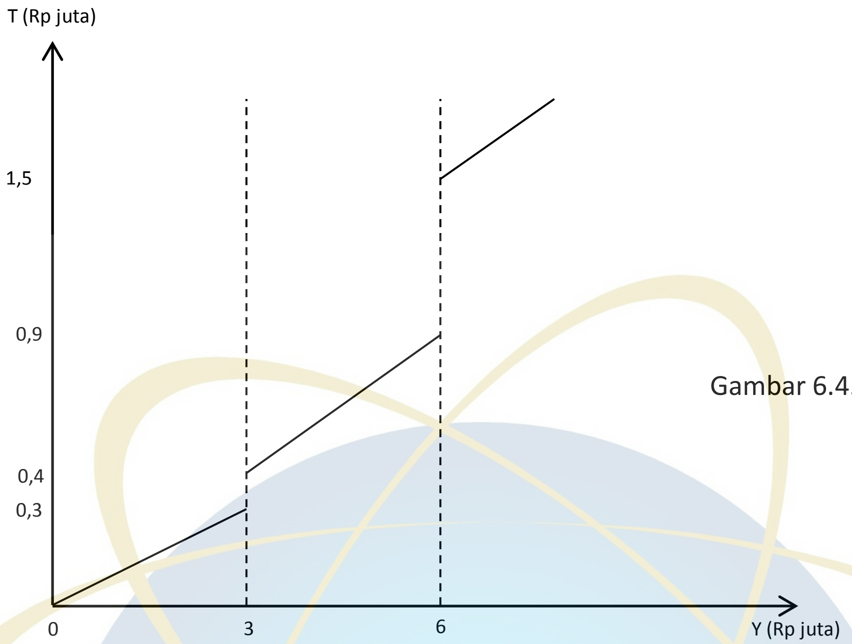
Apabila pendapatan dilambangkan dengan Y dan jumlah pajak yang ditawarkan adalah T, maka fungsi pajak pendapatannya dapat dituliskan sebagai:

$T = 0{,}10Y \qquad 0 \le Y < 3$

$T = 0{,}15Y \qquad 3 \le Y \le 6$

$T = 0{,}25Y \qquad Y > 6$

Apabila digambarkan, maka akan terlihat bahwa kurvanya akan asinambung di dua tempat, yaitu pada Y = 2,9999… dan pada Y = 6,000…1




Gambar 6.4.

**Latihan:**

1. $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 1)$
2. $\lim_{x\to 3}(3x^4 - 2x^2 + 4x + 5)$
3. $\lim_{x\to 5} \sqrt{x-1}$
4. $\lim_{x\to 5} \left(\frac{x-1}{x-3}\right)$
5. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{(3x^2+2x-5)}{3}}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{(3x^3+2x^2-5x+2)}{(x^3-2x^2)}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{(3x^3+4x-8)}{(5x^2+3x)}$
8. $\lim_{x\to \infty} \frac{(-x^2+4x-18)^4}{(5x+10x)^4}$
9. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{(100x^2+14x-18)^4}{(x^2+10x)}}$
10. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{(\frac{20x^2+4x-18)}{(4x^2+10x)}}$

# BAB 7
# MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI

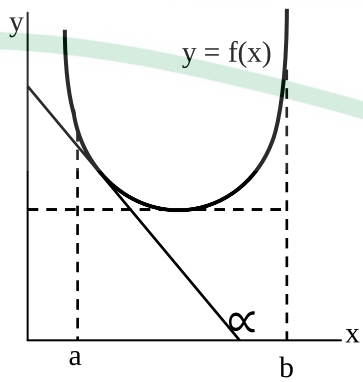
Dalam fungsi nonlinear sering ditemui titik ekstrem, terutama titik maksimum. Titik ini sangat penting untuk menentukan arah grafik. Dengan demikian, penentuan titik sangat dibutuhkan untuk penganalisisan.

## A. Pengertian Titik Ekstrem

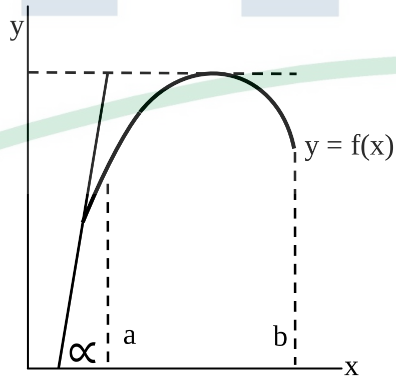
Titik yang pertambahan fungsinya mencapai posisi terendah dan kemudian menurun atau sebaliknya dimana merupakan titik yang pengurangan fungsinya mencapai posisi tertinggi dan kemudian meningkat merupakan titik ekstrem. Titik ekstrem ini merupakan titik stasioner. Titik ekstrem dapat berupa titik maksimum atau titik minimum. Syarat utama titik ekstrem ini adalah turunan atau diferensial fungsinya sama dengan nol ($\frac{dy}{dx} = 0$).

Suatu fungsi berlaku untuk batas-batas tertentu yaitu suatu fungsi y = f(x) dimana $a \leq x \leq b$, mempunyai kemiringan ke bawah seperti terlihat pada Gambar 7.1. Maka, fungsi tersebut dinamakan fungsi yang menurun (*decreasing function*). Dalam hal ini nilai fungsi y menurun pada saat nilai x bertambah, sehingga kemiringan kurva yaitu$\frac{dy}{dx} = tg \propto < 0$.

Sebaliknya, apabila fungsi itu mempunyai kemiringan yang meningkat seperti terlihat pada Gambar 7.2. fungsi tersebut dinamakan fungsi yang menaik (*increasing function*). Dalam hal ini nilai fungsi y menaik pada saat nilai x bertambah, sehingga kemiringan kurva yaitu $\frac{dy}{dx} = tg \propto > 0$.




*Gambar 7.1. Grafik Fungsi Menurun*




*Gambar 7.2. Grafik Fungsi Menaik*

Dalam batas-batas a dan b itu, fungsi f(x) tesebut akan mempunyai nilai fungsi y tertinggi/maksimum, dan nilai fungsi y yang terendah/minimum. Dengan begitu, kita melihat adanya dua istilah yang perlu kita ketahui, yaitu:

- Absolut maksimum/minimum
- Relatif maksimum/minimum.

Titik di mana nilai fungsi y adalah paling tinggi dari seluruh nilai fungsi y yang ada disebut dengan *absolut minimum*. Fungsi f(x) mempunyai nilai fungsi yang absolut maksimum pada nilai $x = x_0$ dalam batas-batas $a \leq x \leq b$ jika fungsi f (x) tersebut mempunyai nilai y yang paling tinggi, atau:

$f(x_0) \geq f(x)$.

Demikian pula sebaliknya dengan *absolut minimum*, yaitu titik beberapa nilai fungsi y adalah paling rendah dari seluruh nilai fungsi y yang ada, atau

$f(x_0) \leq f(x)$.

Suatu titik dimana nilai fungsi y adalah terbesar dibandingkan dengan nilai x yang lain berdekatan/sekitarnya disebut dengan *relatif maksimum*. Fungsi f (x) mempunyai nilai fungsi y yang relatif maksimum pada nilai $x = x_1$ dalam batas-batas $a \leq x \leq b$.

Jadi, suatu fungsi f (x) tersebut mempunyai nilai yang berbesar pada $x = x_1$ apabila dibandingkan dengan nilai x yang lain yang berdekatan/sekitarnya. Dengan kata lain,

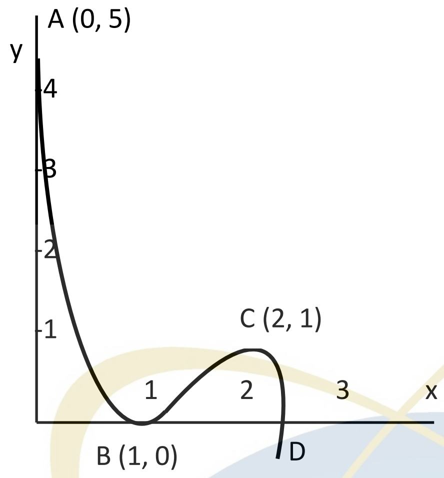
$f(x_1 - \Delta x) \leq f(x) \geq f(x_1 + \Delta x)$.

Sebaliknya, *relatif minimum*, yaitu titik di mana nilai fungsi y adalah yang terkecil dibandingkan dengan nilai x yang lain yang berdekatan/sekitarnya, jadi

$f(x_1 - \Delta x) \geq f(x) \leq f(x_1 + \Delta x)$.

Dalam gambar grafik seperti terdapat pada Gambar 6.3. dalam batas-batas $a \leq x \leq b$, titik-titik maksimumnya adalah:

- titik A adalah titik absolut maksimum;
- titik B adalah titik relatif minimum;
- titik C adalah titik relatif maksimum;
- titik D adalah titik absolut minimum.




*Gambar 7.3.*
*Grafik Fungsi f(x) $y = (x - 1)^2$ (5 -2x)*

Suatu fungsi f (x) mempunyai nilai maksimum dan minimum, maka titik tersebut $f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = 0$. Titik yang demikian disebut titik kritis disebut titik kritis (*critical point*) atau titik ekstrem.

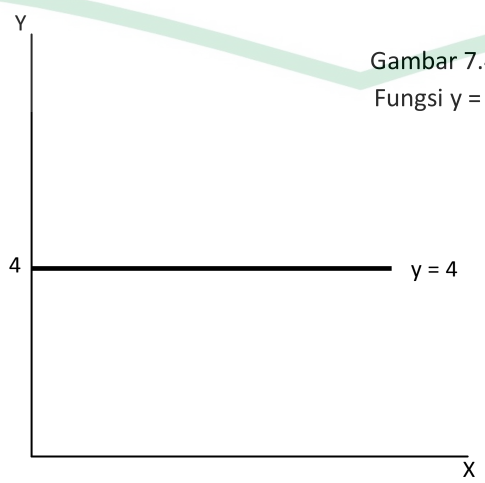
Dalam pembahasan selanjutnya, yang dimaksud maksimum dan minimum adalah relatif maksimum dan relatif minimum.

*Contoh:*

Jika diketahui fungsi y = 4, apakah fungsi tersebut memiliki nilai ekstrem.

Jawab:

Fungsi y = 4, merupakan fungsi linear yang sejajar dengan sumbu x, walaupun derivative pertamanya menunjukkan = 0 atau $\frac{dy}{dx} = 0$, fungsi ini tidak memiliki titik ekstrem baik titik maksimum maupun titik minimum.



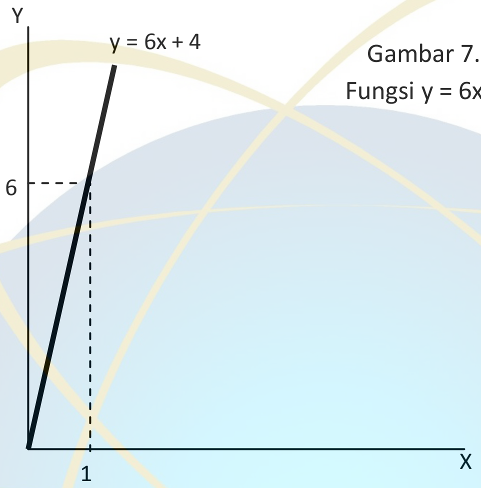

Gambar 7.4.
Fungsi y = 4

*Contoh:*

Jika diketahui suatu fungsi y = 6x + 4, apakah fungsi tersebut memiliki nilai ekstrem.

Jawab:

Pada fungsi y = 6x + 4 tidak memiliki titik ekstrem sebab tidak dipenuhi syarat $\frac{dy}{dx} = 0$. Berdasarkan fungsi di atas $\frac{dy}{dx} = 6$, secara grafik dapat digambarkan.




Gambar 7.5.
Fungsi y = 6x + 4

*Contoh:*

Jika diketahui suatu fungsi y = $5x^2 - 3x + 4$, apakah fungsi tersebut memiliki nilai ekstrem.

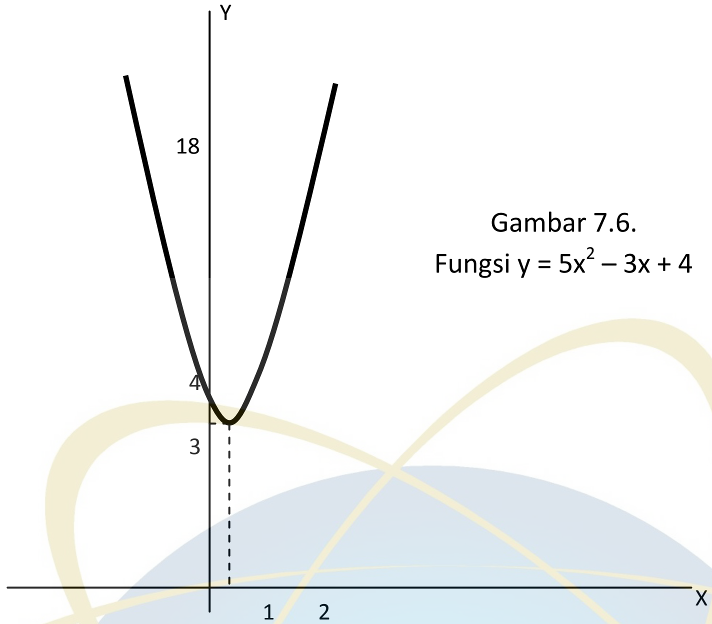
Jawab:

Derivatif dari fungsi di atas $\frac{dy}{dx} = 10x - 3$, syarat ekstrem $\frac{dy}{dx} = 0$,

Maka 0 = 10x – 3 → x = $\frac{3}{10}$, fungsi tersebut memiliki titik ekstrem di x = $\frac{3}{10}$ dan nilai y = $5\left(\frac{3}{10}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{10}\right) + 4 = 3{,}64$.

Adapun jenis ekstremnya ditentukan dari derivatif keduanya yaitu $\frac{d^2y}{dx^2} = 10$, karena turunan keduanya positif atau: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$,

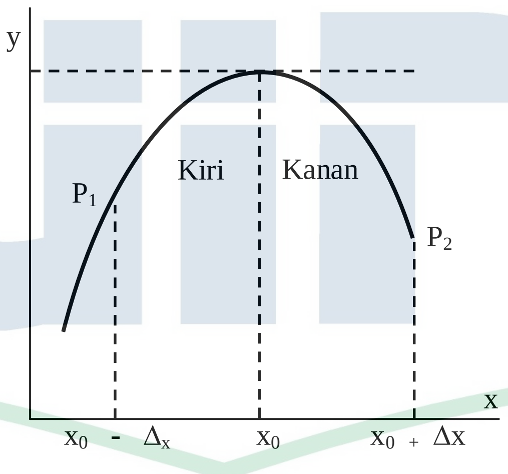
maka titik ekstrem dimaksud adalah merupakan titik ekstrem minimum. Secara grafis dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 7.6.
Fungsi $y = 5x^2 - 3x + 4$

## B. Persyaratan yang Dibutuhkan untuk Suatu Titik Ekstrem

Fungsi f (x) mempunyai nilai y yang relatif maksimum pada x = $x_0$, dan fungsi f (x) mempunyai turunan atau diferensialnya f' (x) maka, turunan diferensialnya $f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = 0$. Hal ini dapat dilihat dalam grafik berikut pada Gambar 7.7.




*Gambar 7.7.*
*Titik ekstrem y = f(x)*

Dari Gambar 7.7. terlihat bahwa di sebelah kiri kurva terdapat kurva yang menaik. Dalam hal ini ditemui pergeseran dari titik $P_1(x_0 - \Delta x, y_1)\ ke\ P_0(x_0, y_0)$, perubahan-perubahan Δx kedua-duanya positif, sehingga perbandingan perubahan (*difference qoutient*)-nya adalah positif, jadi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} > 0$$

Sebaliknya, di sebelah kanan kurva terdapat kurva yang menurun. Dalam hal ini kita ditemui pergeseran dari titik $P_0$ ($x_0$, $y_0$) ke $P_2$ ($x_0 + \Delta x$, $y_2$). Perubahan $\Delta y$ negatif dan perubahan $\Delta x$ positif sehingga perbandingan perubahan (*difference qotient*)-nya adalah negatif, jadi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} < 0$$

Berdasar uraian di atas, terlihat bahwa pada saat titiknya adalah $P_0$ ($x_0$, $y_0$), grafik garis singgungnya adalah sejajar dengan sumbu x. Dalam hal ini tangensnya sama dengan nol.

Jadi pada $x_0$: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 0$

Uraian yang disajikan di atas adalah mengenai titik absolut maksimum atau relatif maksimum. Akan tetapi, persoalan yang demikian juga berlaku untuk absolut minimum atau relatif minimum. Hanya saja pembahasannya terbalik. Kurva sebelah kiri naik, sedangkan kurva sebelah kanannya menurun.

Jadi, syarat pertama untuk suatu titik ekstrem adalah: $\frac{dy}{dx} = 0$.

Hal ini merupakan suatu persyaratan utama dari titik kritis.

Selanjutnya, marilah kita lihat kembali grafik yang terdapat pada Gambar 7.2. dan Gambar 7.7. Berdasarkan gambar-gambar grafik ini terlihat suatu kurva yang naik atau fungsi menaik (*increasing function*) pada kurva sebelah kiri. Akan tetapi, kemudian kurva menurun (*decreasing curve*) terlihat pada kurva sebelah kanan ; $\frac{dy}{dx} < 0$.

Dalam hal ini kita temui adanya penurunan dari suatu tingkat kenaikan.

Oleh karena $\frac{dy}{dx} = 0$, ini berarti $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Sehingga kita peroleh peryaratan-persyaratan yang dibutuhkan untuk suatu titik maksimum adalah:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ dan } \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

Dengan cara seperti ini, kita akan mendapatkan persyaratan yang dibutuhkan untuk suatu titik *minimum*, yaitu

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ dan } \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

Jadi, syarat kedua untuk titik ekstrem maksimum atau minimum adalah $\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0$.

Ada tiga cara yang dapat digunakan untuk menentukan apakah titik ekstrem tersebut adalah titik maksimum atau titik minimum. Ketiga cara tersebut masing-masing menggunakan kriteria-kriteria dari keadaan yang berbeda-beda.

*Cara Pertama:*

Menggunakan pengertian atau definisi tentang relatif maksimum itu atas dasar fungsi y = (x), apabila fungsi f (x) tersebut mempunyai nilai yang terbesar pada x = $x_1$ dibandingkan dengan pada x yang lain yang berdekatan/sekitarnya. Jadi $f(x_0 - \Delta x) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$.

Sebaliknya, untuk titik relatif minimum yaitu $f(x_0 - \Delta x) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$.

*Cara Kedua:*

Dengan menggunakan turunan atau diferensial pertama $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ yaitu bila $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ mempunyai tanda aljabar yang berubah dari plus atau positif (+) ke minus atau negatif (-).

Jika x bertambah nilainya dari suatu nilai yang lebih kecil sedikit dari $x_0$ ke suatu nilai yang lebih besar sedikit dari $x_0$, maka titik ($x_0$, $y_0$) tersebut merupakan titik relatif maksimum. Demikian pula hanya untuk titik relatif minimum, yaitu bila: tanda aljabarnya berubah dari minus atau negatif (-) ke plus atau positif (+).

*Cara Ketiga:*

Dengan menggunakan turunan atau diferensial kedua $f'(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ yaitu bila $f'^{(x)} = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$, maka kurvanya cembung ke atas, sehingga titik pada saat x = $x_0$ adalah relatif maksimum.

Sebaliknya, bila $f'^{(x)} = \frac{d^2y}{dx^2} > 0$, kurvanya cembung ke bawah, sehingga pada saat x = $x_0$ adalah relatif minimum.

*Contoh:*

Diketahui fungsi: y = 40 – 6x + $x^2$

Persyaratan titik ekstrem diperoleh bila:

$\frac{dy}{dx} = -6 + 2x = 0 \rightarrow \therefore x = 3$

Persoalan yang berikut adalah: apakah pada x =3, diperoleh nilai fungsi y maksimum atau minimum: untuk penentuannya kita lihat turunan (derivatif)-nya, yaitu $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$.

Dengan demikian, kita dapatkan kurva cembung ke bawah dan fungsinya mempunyai titik minimum pada x = 3. Nilai fungsi pada titik minimum tersebut adalah: $y = 40 - 6x + x^2 = 40 - 6 \times 3 + 3^2 = 31$. Jadi titik minimum fungsi ini adalah P (3 ; 31).

*Contoh:*

Diketahui fungsi: $y = 2x^2 - 15x^2 + 36x + 20$

Persyaratan titik ekstrem dari fungsi ini diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36 = 0$$

$$6(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$6(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\rightarrow \therefore x_1 = 2 \; dan \; x_2 = 3$$

Persoalan selanjutnya adalah apakah titik maksimum terdapat pada x = 2 atau x = 3? Untuk menentukannya dapat dilakukan dengan tiga cara, yaitu dengan melihat kriteria-kriteria yang digunakan masing-masing.

*Cara pertama:*

Dengan menggunakan pengertian atau definisi relatif maksimum atas dasar fungsi y = f (x), apabila fungsi f (x) tersebut mempunyai nilai yang terbesar pada $x = x_0$ dibandingkan dengan pada x yang lain yang/sekitarnya.

$Y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 20$

Marilah kita lihat titik ekstrem atau krisis pada $P_0$ (2, 48). Apabila kita lihat dan bandingkan titik di sekitar x = 2, yaitu

titik $P_1$ : x = 2,1

titik $P_1$ : x = 2,1 menghasilkan nilai y = 47, 972 dan

titik $P_2$ : x = 1,9 menghasilkan nilai y = 47, 968

Dengan membandingkan ketiga titik $P_0$, $P_1$, dan $P_2$ tersebut di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa:

$f(x_0 - \Delta x) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$ yaitu:

$47,968 \leq 48 \geq 47,972$

Dengan demikian, pada x = 2 diperoleh titik yang relatif maksimum yaitu titik P (2, 48). Selanjutnya, lihat titik ekstrem atau kritis $Q_0$ (3, 47), yaitu:

titik $Q_1$ : x = 2,8 menghasilkan nilai y = 47, 104 dan

titik $Q_2$ : x = 3,2 menghasilkan nilai y = 47, 136

Dengan memperbandingkan ketiga titik $Q_0$, $Q_1$ dan $Q_2$ tersebut, dapatlah diperoleh kesimpulan bahwa:

$f(x_0 - \Delta x) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$

47, 104 ≥ 47 ≤ 47, 136

Maka, pada x = 3 diperoleh titik yang relatif minimum yaitu titik Q (3, 47).

*Cara kedua:*

Dengan menggunakan turunan atau diferensial pertama $f(x)\frac{dy}{dx}$, yaitu bila $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ terdapat perubahan tanda dari positif (+) ke negatif (-) jika x bertambah nilainya dari $x_0$ -Δx) ke ($x_0$ + Δx), maka titik pada $x_0$ adalah relatif minimum.

$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 20$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36$

Marilah kita lihat titik ekstrem atau kritis pada P (2, 48). Dilihat perubahan atau pertambahan nilai x di sekitarnya, kita dapati:

x = 1,5 maka $f'(x)\frac{dy}{dx} = 4{,}5$ (tanda positif)

x = 2,0 maka $f'(x)\frac{dy}{dx} = 0$

x = 2,5 maka $f'(x)\frac{dy}{dx} = -1{,}5$ (tanda negatif)

Dengan terdapatnya perubahan tanda dari positif (+) ke negatif (-) dan dengan bertambahnya nilai x tersebut dari x = 1,5 ke x = 2,5, maka ternyata titik P (2, 48) adalah titik relatif maksimum.

Selanjutnya marilah kita lihat pula titik ekstrem atau kritis Q (3, 47). Dilihat perubahan atau pertambahan nilai x di sekitarnya, maka kita dapati, pada:

x = 2,5 maka $f'(x)\frac{dy}{dx} = 1{,}5$ (tanda positif)

x = 3,0 maka $f'(x)\frac{dy}{dx} = 0$

x = 3,5 maka $f'(x)\frac{dy}{dx} = -4{,}5$ (tanda negatif)

Dengan terdapatnya perubahan tanda dari negatif (-) ke positif (+) dan dengan bertambahnya nilai x tersebut dari x = 2,5 ke x = 3,5, maka ternyata titik Q (3, 47) adalah titik relatif minimum.

*Cara ketiga:*

Dengan menggunakan turunan atau diferensial kedua $f'(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ yaitu bila $f'(x) = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$, maka kurvanya cembung ke bawah. Titik diperoleh adalah titik ekstrem yang relatif minimum.

Sekarang marilah kita lihat fungsi:

$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 20$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 30$

Dilihat dari titik ekstrem atau kritis P (2 ; 48), maka

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(2) - 30 = 24 - 30 = -6 < 0$

Dengan demikian, titik ini merupakan titik relatif maksimum. Sementara itu, kita lihat titik ekstrem atau kritis Q (3 ; 47), maka

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(3) - 30 = 36 - 30 = 6 > 0$

Maka, titik ini merupakan titik relatif minimum.

*Contoh:*

Diketahui fungsi $y = \sqrt{9 - x}$ dalam batas-batas $0 \leq x \leq 9$

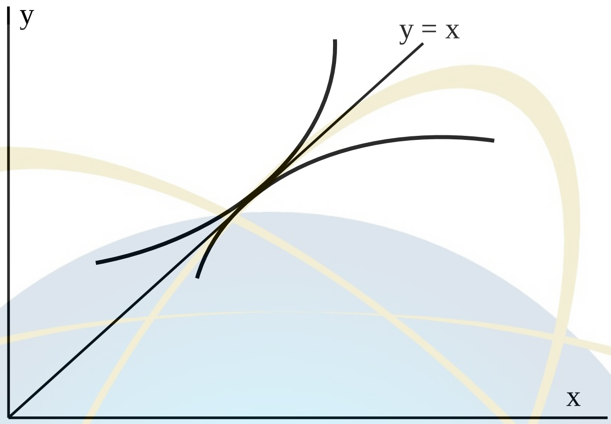
Persyaratan titik ekstrem atau kritis dari fungsi ini diperoleh pada

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0$

Sehingga, dalam hal ini tidak kita peroleh titik ekstrem atau kritis. Nilai yang terbesar dari fungsi y adalah 3 pada saat saat x = 0, dan nilai yang terkecil dari fungsi y ini adalah 0 pada saat x = 9.

## C. Titik Belok (*Point of Infection*)

Suatu fungsi f (x) yang mempunyai titik ekstrem, tetapi titik ekstrem tersebut bukan merupakan titik maksimum atau minimum maka fungsi f (x) tersebut mempunyai titik belok. Hal ini dapat dilihat Gambar 7.8.




*Gambar 7.8. Grafik y = f(x)*

Kurva y = f (x) yang terletak di atas garis y = x disebut kurva yang cekung ke atas (*concave upward*) sedangkan yang terletak di bawah disebut kurva yang cekung ke bawah (*concave downward*). Kurva dari fungsi garis lurus (linear) tidak berlekuk atau berbelok karena tidak cekung ataupun cembung. Hal itu disebabkan tidak mempunyai titik ekstrem.

Bahwa suatu fungsi f (x) yang mempunyai kurva cembung ke atas (*convex upward*) apabila f" ($x_0$) < 0. Fungsi f (x) yang mempunyai kurva cembung ke bawah (*convex downward*) apabila f" ($x_0$) > 0. Fungsi f (x) ini mempunyai titik relatif minimum.

Apabila suatu fungsi f (x) mempunyai hasil turunan/diferensial keduanya yaitu f" ($x_0$) = $\frac{d^2y}{dx^2}$ = 0, maka fungsi f (x) tersebut yang mempunyai titik ekstrem karena f" ($x_0$) = 0. Di samping itu, mungkin selain mempunyai titik relatif maksimum atau minimum, juga mempunyai titik belok. Jadi, persyaratan titik belok dari suatu fungsi f (x) adalah bila

$$f''(x_0) = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

*Contoh:*

Suatu fungsi adalah y = 1/2$x^4$ – 3$x^2$, maka titik beloknya diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2 - 6 = 0$$

$$\rightarrow\therefore 6(x^2 - 1) = 0$$

$$maka\ x_1 = -1\ dan\ x_2 = 1$$

Jadi, ada titik beloknya yaitu titik A (-1 ; -2,5) dan titik B (1 ; -25).

*Contoh:*

Diketahui fungsi: $y = x^3 – 3x^2 + 4$

Persyaratan titik ekstrem atau kritis diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x = 0$$

$$\rightarrow\therefore 3x(x - 2) = 0$$

Maka, ada dua titik ekstrem yaitu titik A (0 ; 4) dan titik B (2 ; 0).

Bila x = 0, maka:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(0) - 6 = -6 < 0$$

sehingga titik A (0 ; 4) adalah titik relatif maksimum.

Apabila x = 2, maka:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(2) - 6 = 6 > 0$$

sehingga titik B (2 ;0) adalah titik relatif minimum.

Peryaratan titik belok diperoleh bila:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2 - 6 = 0$$

$$6 ( x – 1) = 0$$

$$\rightarrow\therefore x = 1$$

Jadi titik beloknya adalah titik C (1 ; 2)

*Contoh:*

Diketahui juga fungsi: $y = x^3 + 3x + 5$

Persyaratan titik ekstrem atau kritis diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3 = 0$$

Dalam hal ini tidak terdapat titik ekstrem atau kritis atau titik maksimum ataupun minimum. Peryaratan titik belok diperoleh bila:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = 0 \rightarrow\therefore x = 0$$

*Contoh:*

Suatu fungsi y = $x^2$

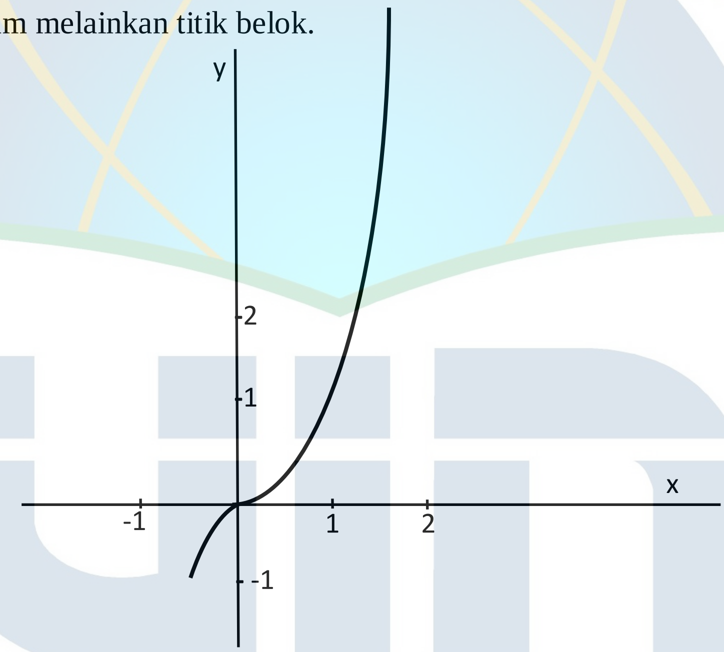
Apabila grafiknya digambar maka pada gambar grafik fungsi ini akan terlihat pada Gambar. Dalam Gambar 6.6. ini terlihat bahwa tidak ada titik relatif masimum atau minimum, tetapi hanya ada titik belok. Hal ini dapat dibuktikan dengan persyaratan yang harus dipenuhi untuk titik tersebut.

Persyaratan titik ekstrem atau titik kritis diperoleh pada:

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 = 0$ bila x = 0, maka:

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = 6\ x\ 0 = 0.$

Oleh karena titik pada x = 0; $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, maka titik A (0, 0) bukan titik maksimum atau minimum melainkan titik belok.




*Gambar 7.9. Grafik fungsi y = $x^2$*

*Contoh:*

Suatu fungsi y = $x^3 - 4x^2 + 5x$

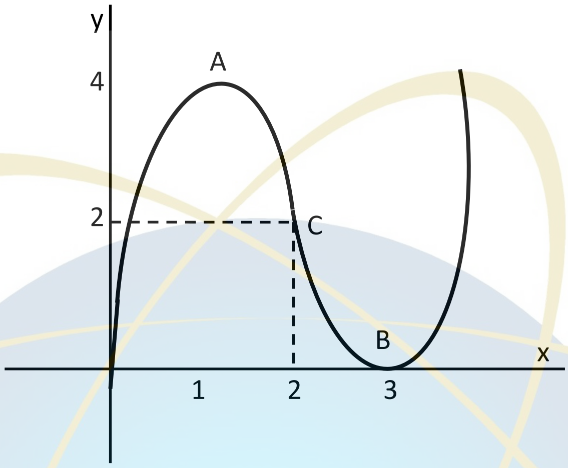
Apabila grafiknya digambarkan, grafik fungsi ini akan terlihat pada Gambar 7.10. Grafik ini digambarkan dengan menggunakan tabel x dan y.

| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -16 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 20 |

Dari Gambar 7.10. terlihat bahwa ada titik relatif maksimum dan relatif minimum serta titik belok. Titik-titik tersebut diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^3 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x-1)(x-3) = 0$$




*Gambar 7.10.*

Bila $x \rightarrow \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12 = -6 < 0$, maka titik A (1 : 4) adalah titik relatif maksimum. Sedangkan, jika x = 3, maka $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12 = 6 > 0$ sehingga titik B (3 :0) adalah titik relatif minimum.

Apabila $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12 = 0$

$x \rightarrow \therefore x = 2$

Maka titik C (2 ; 2) adalah titik belok.

# BAB 8
# DIFERENSIAL

## A. Kuosien Diferensiasi dan Derivatif

Diferensial membahas tentang tingkat perubahan suatu fungsi sehubungan dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan. Dengan diferensial dapat diketahui posisi dari fungsi yang sedang dipelajari seperti titik maksimum, titik belok ataupun titik minimum. Konsep diferensial menjadi salah satu alat analisis yang penting dalam ekonomi.

Jika y = *f(x)* dan terdapat tambahan variabel bebas x sebesar Δ x, maka bentuk persamaannya dapat dituliskan menjadi:

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Dimana Δx adalah tambaha x, dan Δy adalah tambahan y sebagai akibat adanya tambahan x. Jadi Δy ada karena adanya Δx. Apabila ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan di atas dibagi Δx di kedua sisi, maka diperoleh:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bentuk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ inilah yang disebut dengan hasilbagi perbedaan atau kuosien diferensiasi (*difference quotient*), memperlihatkan tingkat perubahan rata-rata variabel terikat y terhadap variabel bebas x.

Proses penurunan sebuah fungsi, disebut juga proses pendiferensiasian atau diferensasi, pada dasarnya merupakan penentuan limit suatu kuosien diferensiasi dalam hal pertambahan variabel bebasnya sangat kecil atau mendekati nol. Hasil yang diperoleh dari proses diferensiasi tersebut dinamakan turunan atau derivatif (derivative).

Dengan demikian, jika y = *f(x)*

maka kuosien diferensiasinya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

dan turunan fungsinya $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

## B. Kaidah Diferensial

Derivatif pertama dari suatu fungsi y = *f(x)* adalah limit bagi perbedaan di mana $\Delta_x \rightarrow 0$, oleh karena itu untuk menentukan nilai dari derivatif suatu fungsi tersebut dapat dilakukan dengan dua cara, antara lain:

1. Menentukan hasilbagi perbedaan dari fungsi tersebut, seperti pada metode laju perubahan fungsi;
2. Mencari nilai limit dari hasil bagi perbedaan tersebut ketika delta x (jarak perubahan dari x) mendekati nol ($\Delta_x \rightarrow 0$).

Akan tetapi, pada bab ini dibahas metode secara langsung untuk mencari nilai derivatif pertama dari suatu fungsi dengan cara menggunakan aturan-aturan diferensiasi (cara kedua).

Notasi derivatif yang digunakan dalam buku ini: $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\ atau\ f'(x)$, dengan aturan sebagai berikut:

- **Diferensiasi Konstanta → y = k (Konstanta)**

Untuk suatu fungsi konstan → y = k (konstanta), turunan pertama dari fungsi tersebut adalah 0 (nol), seperti telah diungkapkan sebelumnya pada metode laju perubahan fungsi:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

*Contoh:*

a. y = 7, maka $\frac{dy}{dx} = 0$
b. y = log 10, maka $\frac{dy}{dx} = 0$
c. y = ln e, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

- **Diferensiasi Fungsi Pangkat: *f(x)* = $x^n$**

Untuk suatu fungsi *f(x)*: y = $x^n$, secara umum derivatif (turunan pertama) dari fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{dy}{dx} = n.x^{n-1}$$

*Contoh:*

a. y = $x^{10}$, maka $\frac{dy}{dx} = 10\,x^9$
b. y = $x^8$, maka $\frac{dy}{dx} = 8\,x^7$
c. y = $x^{21}$, maka $\frac{dy}{dx} = 21\,x^{20}$

- **Diferensiasi Perkalian Konstanta dengan Fungsi:**

  (y = k . u, dimana u = *f(x)* dan k = Konstanta)

Untuk suatu fungsi *f(x)*: y = k .u, di mana u fungsi dari x dan k Konstanta, secara umum derivatif (turunan pertama) dari fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{k}.\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

*Contoh:*

a. y = $ax^n$, maka $\frac{dy}{dx} = a\,(n)x^{n-1} = anx^{n-1}$

b. y = $3x^9$, maka $\frac{dy}{dx} = 3\,(9)x^{9-1} = 27x^8$

c. y = $10x^{-3}$, maka $\frac{dy}{dx} = 10(-3)x^{-3-1} = -30x^{-4}$

d. y = $\sqrt{2x^8}$, atau y = $(2x)^{8/2}$ → $\frac{dy}{dx} = 8x^3$

- **Diferensiasi Pembagian Konstanta dengan Fungsi**

  Jika $y = \frac{k}{v}$, dimana v = *f(x)*, maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{k.dv/dx}{v^2}$

*Contoh:*

a. $y = \frac{4}{x^3}, \frac{dy}{dx} = -\frac{4(3x^2)}{(x^3)^2} = -\frac{12x^2}{x^6}$

b. $y = \frac{5}{x^4}, \frac{dy}{dx} = -\frac{5(4x^3)}{(x^4)^2} = -\frac{20x^3}{x^8}$

- **Diferensiasi Penjumlahan (Pengurangan) Fungsi: y = u ± v**

Suatu fungsi penjumlahan, y = u ± v, di mana u = *f(x)* dan v = g(x), turunan pertama dari model fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} \pm \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}}$$

Atau:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{u}' \pm \mathrm{v}'$$

*Contoh:*

a. y = (5x + 7), maka $\frac{dy}{dx} = u' + v' \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5 + 0$

b. y = ($4x^2$ + 10x + 3), maka $\frac{dy}{dx} = u' + v' \rightarrow \frac{dy}{dx} = 8x + 10$

c. y = $5x^2 - 7x^{-3}$, maka $\frac{dy}{dx} = 10x + 21x^{-4}$

d. y = (5x + 6) + ($5x^3$ + 4x), maka $\frac{dy}{dx} = u' + v' \rightarrow \frac{dy}{dx} = (5) + (15x^2 + 4)$

- **Diferensiasi Perkalian Fungsi: y = u .v**

Suatu perkalian fungsi: y = u . v, di mana u = *f(x)* dan v = g(x), turunan pertama dari model fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot (v) + (u) \cdot \frac{dv}{dx}$$

Atau:

$$\frac{dy}{dx} = u' \cdot v + u \cdot v$$

*Contoh:*

a. $y = (4x^6 + 8x - 12)(½\, x^3 + 8)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}(v) + (u)\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (24x^5 + 8)\left(\frac{1}{2}x^3 + 8\right) + (4x^6 + 8x - 12)\left(\frac{3}{2}x^2\right)$$

b. $y = (2x^2 - 4x)(3x^{1/3} + 8x^{-2})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}(v) + (u)\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x-4)\left(3x^{\frac{1}{3}} + 8x^{-2}\right) + (2x^2 - 4x)\left(x^{-\frac{2}{3}} - 16x^{-3}\right)$$

c. $y = (2x^2 - 4x)(3x^{1/3} + 8x^{-2})\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^4\right)$

y = u. v. w

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right)(vw) + \left(\frac{dv}{dx}\right)(uw) + \left(\frac{dw}{dx}\right)(uv)$$

$$\frac{dy}{dx} + (4x-4)\left\{\left(3x^{\frac{1}{3}} + 8x^{-2}\right)\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^4\right)\right\}$$

$$+\left(x^{-\frac{2}{3}} - 16x^{-3}\right)\left\{(2x^2-4x)\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^4\right)\right\}$$

$$+\left(\frac{4}{3}x^3 - 12x^3\right)\left\{(2x^2-4x)\left(3x^{1/3} + 8x^{-2}\right)\right\}$$

- **Diferensiasi Pembagian Fungsi**

Suatu fungsi $y = \frac{u}{v}$, di mana u = *f(x)* dan v = g(x), maka turunan dari fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)v - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

Atau dapat ditulis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

*Contoh:*

a. $y = \frac{2x^2}{x^3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - v\prime u}{v^2} = \frac{(4x.)(x^3) - (3x^2).(2x^2)}{(x^3)^2} = \frac{4x^4 - 6x^4}{x^6}$

$= \frac{-2}{x^2} = -2x^{-2}$

b. $y = \frac{3x^3}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(9x^2)(x^2) - (2x)(3x^3)}{(x^2)^2} = \frac{9x^4 - 6x^4}{x^4}$$

$= \frac{3x^4}{x^4} = 3$

- **Diferensiasi Polinomial**

  *y = C . x*$^n$

  $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{X}^{\mathrm{n}-1}$

  Contoh:

  a. y = $5X^4$ → $\frac{dy}{dx} = 20x^3$

  y = $10x^5$ → $\frac{dy}{dx} = 50x^4$

- **Diferensiasi Fungsi Komposit**

  Jika y = *f(u)*, sedangkan u = *g(x)*, dengan kata lain y = *f{g(x)}*,

  Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

  *Contoh*:

  a. $(3x^2 + 5)^2$

  Misalkan u = $3x^2$ + 5, *du/dx* = 6x

  sehingga y = $u^2$, *dy/du* = 2u

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$ = 2u(6x) = $2(3x^2 + 5)(6x) = 36x^3 + 60x$

  b. $(2x^2 + 3)^2$

  Misalkan u = $2x^2$ + 3, *du/dx* = 4x

  sehingga y = $u^2$, *dy/du* = 2u

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$ = 2u(4x)

  $= 2(2x^2 + 3)(4x)$

  $= 16x^3 + 24x$

c. $(3x^3 + 8)^2$

Misalkan $u = 3x^3 + 8$, $du/dx = 9x^2$

sehingga $y = u^2$, $dy/du = 2u$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 2u(9x^2) = 2(3x^3+ 8)(9x^2)$

$= 54x^5 + 144x^2$

- **Diferensiasi Fungsi Berpangkat**

Jika $y = u^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta

Maka $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}.\frac{du}{dx}$

Kaidah ini mirip dengan kaidah sebelumnya dan merupakan kasus khusus dari kaidah fungsi komposit. Untuk kaidah ini terdapat pula sebuah kasus khusus, yakni jika $u = f(x) = x$, sehingga $y = u^n = x^n$, maka $dy/dx = nu^{n-1}$

*Contoh*:

a. $(3x^2 + 5)^2$

Misalkan $u = 3x^2 + 5$, maka $du/dx = 6x$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$= 2(3x^2 + 5)(6x) = 36x^3 + 60x$

b. $(2x^2 + 3)^2$

Misalkan $u = 2x^2 + 3$, maka $du/dx = 4x$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$= 2(2x^2 + 3)(4x) = 16x^3 + 24x$

c. $(3x^3 + 8)^2$

Misalkan $u = 3x^3 + 8$, maka $du/dx = 9x^2$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$= 2(3x^3 + 8)(9x^2)$

$= 54x^5 + 144x^2$

- **Diferensiasi Fungsi Logaritmik**

Jika $y = {}^a\log x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$

Contoh:

$y = {}^5\log 2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{2 \ln 5}$

- **Diferensiasi Fungsi Komposit-Logaritmik**

  Jika $y = {}^{a}\log u$, dimana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{u} . \frac{du}{dx}$

  Contoh:

  $y = \log\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

  Misalkan $u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

  $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{u} . \frac{du}{dx}$

  $= \frac{\log e}{\frac{(x-3)}{(x+2)}} . \frac{5}{(x+2)^2}$

  $= \frac{5 \log e}{(x-3)(x+2)} = \frac{5 \log e}{(x^2-x-6)}$

- **Diferensiasi Fungsi Komposit-Logaritmik-Berpangkat**

  Jika $y = ({}^{a}\log u)^n$, dimana $u = g(x)$ dan $n$ adalah konstanta, maka

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{\log_a e}{u} . \frac{du}{dx}$

  Contoh: $y = (\log 5 x^2)$

  Misalkan $u = 5 x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

  $\frac{dy}{dx} = 3(\log 5 x^2)^2 \left(\frac{\log e}{5 x^2}\right) (10x)$

  $= \frac{30x(\log 5 x^2)^2 \log e}{5 x^2} = \frac{6}{x}(\log 5 x^2) \log e$

- **Diferensial Fungsi Logaritma Natural**

  (${}^{e}\log x = \text{In } x$) jika $y = {}^{e}\log x$ atau $y = \text{In } x$, maka:

  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot {}^{e}\log e \cdot (1)$

  Jika $y = {}^{e}\log u$, di mana $u = f(x)$, maka:

  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot {}^{e}\log e \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$

  Jika $y = (\ln u)^n$, dimana $u = g(x)$ dan $n$ adalah konstanta, maka:

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$

  Contoh:

  a. $y = \ln x^3, maka\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^3)$

  b. $y = (\ln 5 x^2)^3$, maka $\frac{dy}{dx} = 3(\ln 5 x^2)^2 \left(\frac{1}{5x^2}\right)(10x)$

  $= \frac{6}{x}(\ln 5 x^2)^2$

- **Diferensiasi Fungsi Eksponensial**

Untuk menyelesaikan model diferensial dari fungsi eksponensial, caranya adalah sebagai berikut: "*Kalikan masing-masing ruas kiri dan kanan dengan Logaritma Natural* (*In*)", dari bentuk fungsi eksponensial: y =$a^x$, setelah dikalikan dengan In, hasilnya: In y = In $a^x$

Langkah selanjutnya, gunakan aturan logaritma yang menyatakan, bahwa log $a^b$ = *b* log *a*, sehingga hasil perkalian dengan *In* dari fungsi eksponensial tersebut menjadi: In *y* = *x* In *a*, kemudian tentukan turunan (derivatif ) dari fungsi masing-masing ruasnya, seperti berikut:

In *y* = In $a^x$, atau In *y* = *x* In *a*

Hasil, turunan fungsi terhadap *x* pada masing-masing ruasnya, seperti berikut:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln a + x \cdot 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = (x \ln a) \cdot \ln a$$

Contoh:

a. $y = 5^x, \frac{dy}{dx} = a^x \ln a = 5^x \ln 5$

Dalam hal $y = e^x$, maka $dy/dx = e^x$ juga, sebab ln $e$ = 1

b. $y = \ln 10^{(2x-3)}, \frac{dy}{dx}$

$y = \{\ln 10^{(2x-3)}\} \rightarrow y = (2x-3)\ln 10$

$\frac{dy}{dx} = 2\ln 10$

- **Diferensiasi Fungsi Kompleks**

Jika $y = u^v$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

maka $\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u.\frac{dv}{dx}$

penentuan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = u^v$ ini dapat pula dilakukan dengan jalan melogaritmakan fungsi atau persamaannya, kemudian mendiferensiasikan masing-masing ruasnya.

$y = u^v$

$\ln y = v \ln u$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ln u\ \frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \left(v\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ln u\,\frac{dv}{dx}\right)u^v$ mengingat $y = u^v$

$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u.\frac{dv}{dx}$

Contoh:

a. $y = 4x^{x^3}$

Misalkan $u = 4x \rightarrow \frac{du}{dx} = 4$; dan; $v = x^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$

$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u.\frac{dv}{dx}$

$= (x^3)4x^{x^3-1}(4) + 4x^{x^3}\ln 4x\,(3x^2)$

$= 16x^{x^3+2} + 12x^{x^3+2}\ln 4x$

$= 4x^{x^{3+2}}(4 + 3\ln 4x)$

b. $y = x^{(x^2+1)^3}$

Misalkan $u = x \rightarrow \frac{du}{dx} = 1$; dan; $v = (x^2+1)^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 6x(x^2+1)^2$

$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u.\frac{dv}{dx}$

$= (x^2+1)^3x^{(x^2+1)^3-1}(1) + x^{(x^2+1)^3}lnx\{6x(x^2+1)^2\}$

$= (x^2+1)^3x^{(x^2+1)^3-1} + 6x^{(x^2+1)^3+1}(x^2+1)^2\ln x$

$= (x^2+1)^2x^{(x^2+1)^3+1}\{(x^2+1)x^{-2} + 6\ln x\}$

- **Diferensiasi Fungsi Balikan**

Jika $y = f(x)$ dan $x = g(y)$ adalah fungsi-fungsi yang saling berkebalikan (*inverse function*), maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$

Contoh:

a. $x = 5y + 0{,}5\,y^4$

$\frac{dx}{dy} = 5 + 2\,y^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = 1/(5 + 2\,y^3)$

b. $x = \ln(2\,y^3 + y^2)$

$\frac{dx}{dy} = \frac{6\,y^2+2y}{2\,y^3+y^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{2y^3+y^2}{6y^2+2y} = \frac{2y^2+y}{6y+2}$

- **Diferensiasi Implisit**

Jika $f(x, y) = 0$ merupakan fungsi implisit sejati (tidak mungkin dieksplisitkan), $dy/dx$ dapat diperoleh dengan mendiferensiasikannya suku demi suku, dengan menganggap $y$ sebagai fungsi dari $x$.

a. $4xy^2 - x^2 + 2y = 0$, tentukan *dy/dx*

$8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 - 2x + 2\frac{dy}{dx} = 0$

$(8xy + 2)\frac{dy}{dx} = 2x - 4y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-4y^2}{8xy+2} = \frac{x-2y^2}{4xy+1}$

Dalam contoh ini $4xy^2$ diperlakukan sebagai perkalian dua fungsi x, kemudian didiferensiasikan dengan menggunakan kaidah perkalian fungsi. Jadi, $u = 4x$ dan $v = y^2$, diperoleh *du/dx* = 4 dan *dv/dx* = 2*y (dy/dx)*, sehingga *d(uv)/dx = u(dv/dx) = u(dv/dx) + v(du/dx) = 8 xy (dy/dx) +* $4y^2$. Adapaun *dy/dx* dari $x^2$ adalah 2*x*, sedangkan *dy/dx* dari 2*y* adalah 2 (*dy/dx*).

b. $x^2y - e^x - e^y = 5$, tentukan *dy/dx*

$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - e^x - e^y\frac{dy}{dx} = 0$

$(x^2 - e^y)\frac{dy}{dx} = e^x - 2xy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x-2xy}{x^2-e^y}$

## C. Hakikat Derivatif dan Diferensial

Telah dijelaskan sebelumnya perbedaan sekaligus kesamaan antara kuosien diferensi dan derivatif sebuah fungsi. Kuosien diferensi $\Delta y/\Delta x$ tak lain adalah lereng dari kurva *y = f(x)*. Sedangkan derivatif *dy/dx* adalah lim ($\Delta y/\Delta x$) untuk $\Delta x \to 0$. Jika $\Delta x$ sangat kecil, $\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y/\Delta x) = \Delta y/\Delta x$ itu sendiri, atau derivatif fungsi yang bersangkutan sama dengan kuosien diferensinya (*dy/dx* = $\Delta y/\Delta x$). Jadi untuk $\Delta x$ yang sangat kecil, derivatif (seperti halnya kuosien diferensi) juga mencerminkan lereng dari kurva *y = f(x)* (Dumairy, 2007: 208).

Notasi derivatif *dy/dx* sesungguhnya terdiri atas dua suku, yaitu *dy* dan *dx*. Suku *dy* dinamakan diferensial dari *y*, sedangkan *dx* merupakan diferensial dari *x*. Diferensial dari *x (dx)* mencerminkan perubahan yang sangat kecil pada variabel bebas *x*.

diferensial dari *x : dx* = $\Delta x$

Adapun diferensial dari *y* (*dy*) mencerminkan taksiran perubahan pada variabel terikat *y* berkenaan dengan perubahan sangat kecil pada variabel bebas *x*. Diferensial dari variabel terikat sebuah fungsi sekaligus merupakan pula diferensial dari fungsi yang bersangkutan, yakni hasilkali derivatifnya terhadap perubahan pada variabel bebas.

diferensial dari *y* : $dy = \frac{dy}{dx}\ \Delta x$

Berdasarkan penjelasanmengenai masing-masing *dx* dan *dy* di atas, maka derivatif *dy/dx* tak lain adalah lereng taksiran dari kurva *y* = *f(x)* pada kedudukan *x* tertentu. Lereng yang sesungguhnya adalah kuosien diferensi $\Delta y/\Delta x$. Lereng taksiran ini dapat lebih besar dari, atau lebih kecil dari, atau sama dengan lereng yang sesungguhnya. Hal ini tergantung pada jenis fungsinya dan besar kecilnya perubahan pada variabel bebas.

Untuk fungsi *y* = *f(x)* yang linier, lereng taksiran senantiasa sama dengan lereng sesungguhnya, berapapun $\Delta x$. Atau dengan kata lain, derivatif fungsi linier tak lain adalah kuosien diferensinya, *dy/dx* = $\Delta y/\Delta x$. Berapapun $\Delta x$ $(= dx)$, akan selalu *dy* = $\Delta y$, sehingga *dy/dx* = $\Delta y/\Delta x$.

Untuk fungsi *y* = *f(x)* yang non-linier, semakin besar $\Delta x$ semakin besar pula perbedaan antara lereng taksiran (derivatif, *dy/dx*) dan lereng sesungguhnya (kuosien diferensiasi, $\Delta y/\Delta x$). Dengan $\Delta x$ yang semakin besar, semakin besar pula perbedaan antara *dy* dan $\Delta y$, sehingga kian besar pula perbedaan antara *dy/dx* dan $\Delta y/\Delta x$. Sebaliknya, semakin kecil $\Delta x$ semakin kecil pula perbedaan antara lereng taksiran dan lereng sesungguhnya. Dan jika $\Delta x$ sangat kecil ($\Delta x \rightarrow$ 0), lereng taksiran akan sama dengan lereng sesungguhnya (kalaupun terdapat perbedaan, nilainya sedemikian kecilnya sehingga dapat diabaikan).

Untuk lebih dapat memahami penjelasan di atas, akan diberikan dalam bentuk contoh simulasi angka sebagai berikut:

Misalkan $y = 3\ x^2 - 4x + 5$ dan ingin diketahui serta dibandingkan nilai *dy* dan nilai $\Delta y$ untuk $\Delta x = 0{,}0001$ dari kedudukan *x* = *2*.

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 4 = 6(2) - 4 = 8$$

$$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8\ (0{,}0001) = 0{,}0008$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 5 - (3x^2 - 4x + 5)$$

$$= 3\ (2 + 0{,}0001)^2 - 4\ (2 + 0{,}0001) + 5 - 3(2)^2 + 4\ (2) = 0{,}0008$$

Dalam contoh ini, untuk $x$ = 2 dan $\Delta x = 0{,}0001$ ternyata $dy$ = $\Delta y$ = 0,0008, konsekuensinya $dy/dx$ = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$. Berarti lereng taksirannya persis sama dengan lereng yang sesungguhnya.

Jika nilai $\Delta x$ kita modifikasi menjadi $\Delta x = 0{,}0005$, maka:

$$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8\,(0{,}0005) = 0{,}004$$

$$\Delta y = 3(2 + 0{,}0005)^2 - 4(2 + 0{,}0005) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 = 0{,}004$$

Sekali lagi $dy = \Delta y\ dan \frac{dy}{dx} = \Delta y/\Delta x$

Kemudian jika nilai $\Delta x = 0{,}001$, maka:

$$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8\,(0{,}001) = 0{,}008$$

$$\Delta y = 3(2 + 0{,}001)^2 - 4(2 + 0{,}001) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 = 0{,}008003$$

Kali ini terdapat sedikit perbedaan antara *dy* dan $\Delta y$, yaitu sebesar 0,000003. Akan tetapi karena perbedaan sedemikian kecilnya sehingga dapat diabaikan. Dalam kasus ini, $dy < \Delta y$ berarti lereng taksirannya "*under-estimated*".

Selanjutnya akan dibahas mengenai derivatif dari derivatif. Setiap fungsi sebenarnya dapat diturunkan lebih dari satu kali tergantung pada derajatnya. Atau dengan kata lain, setiap turunan masih bisa diturunkan lagi. Turunan pertama suatu fungsi adalah turunan dari fungsi awal atau fungsi aslinya. Turunan kedua suatu fungsi adalah turunan dari turunan pertama, dan seterusnya.

| | |
|---|---|
| Fungsi awal | : $y = f(x)$ |
| Turunan pertama | : $y' \equiv f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$ |
| Turunan kedua | : $y'' \equiv f''(x) \equiv \frac{d^2y}{d^2x} \equiv \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ |
| Turunan ketiga | : $y''' \equiv f'''(x) \equiv \frac{d^3y}{dx^3} \equiv \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ |
| Turunan ke-*n* | : $y^n \equiv f^n(x) \equiv \frac{d^ny}{dx^n} \equiv \frac{d^nf(x)}{dx^n}$ |

Contoh:

$y = f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 10x – 15$

$y' = f'(x) = 6x^2 - 10x + 10$

$y'' = f''(x) = 12x – 10$

$y''' = f'''(x) = 12$

$y^{IV} = 0$

derivatif yang diperoleh dari derivatif sebuah fungsi dinamakan derivatif berderajat lebih tinggi (*higher-order derivatives*). Derivatif pertama dan derivatif kedua bermanfaat dalam pengoperasian di dalam analisis ekonomi, terkait dengan banyaknya fungsi di dalam analisis ekonomi.

**D. Aplikasi Diferensial Dalam Ekonomi**

Matematika sebagai alat untuk analisis dalam berbagai cabang disiplin ilmu, mempunyai peranan sangat menonjol sesuai dengan perkembangan ilmu pengetahuan. Dalam mempelajari teori ekonomi ilmu-ilmu sosial, matematika semakin banyak digunakan sebagai alat untuk mempermudah pemecahan masalah serta sebagai alat untuk mengambil keputusan ataupun perencanaan. Penggunaaan matematika dalam berbagai ilmu disiplin dinamakan sebagai matematika terapan, adalah merupakan bagian dari matematika, maka model penggunaan diferensial ini pun dinamakan sebagai diferensial terapan atau aplikasi diferensial.

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa perhitungan diferensial adalah merupakan suatu perhitungan yang menyangkut masalah perubahan fungsi, maka sebagai kaitan permasalahan yang menyangkut masalah perubahan fungsi, maka sebagai kaitan permasalahan yang muncul di dalam teori ekonomi di antaranya perubahan marginal dari suatu fungsi, seperti perubahan atas biaya total (*Total Cost*), perubahan atas pendapatan total (*Total Revenue*), serta keuntungan maksimum dan lainnya.

**1. Fungsi Biaya (Cost)**

Dalam suatu proses produksi, dikenal istilah biaya. Biaya yang digunakan untuk seluruh proses produksi dikatakan sebagai biaya total (*Total cost*), sedangkan biaya yang digunakan untuk satu satuan unit produksi dikatakan sebagai biaya rata-rata (*Average Cost*). Biaya total terdiri dari total biaya tetap (jika produksi = 0) ditambah dengan biaya variabel, secara matematis biaya total dituliskan:

TC = TFC + TVC

Di mana:

TC : *Total cost*

TFC : *Total Fixed Cost* (biaya tetap)

TVC : *Total Variable Cost* (biaya tidak tetap)

Yang dimaksud dengan *fixed cost* adalah biaya dalam suatu unit kegiatan biaya ini tidak akan mengalami perubahan walaupun terjadi pengurangan atau penambahan produksi (misalnya dalam kegiatan produksi) sehingga untuk fungsi semacam ini di dalam matematika dikenal dengan istilah fungsi konstan FC = k (konstan).

Sedangkan yang dimaksud dengan *variable cost* adalah biaya yang sifatnya selalu berubah-ubah sesuai dengan suatu kondisi yang terjadi dalam suatu unit kegiatan, misalnya volume produksi ataupun kondisi yang lain; sehingga fungsi ini secara umum dinyatakan sebagai berikut: VC = f(Q), maka dari kenyataan itu dalam suatu proses produksi sebagai biaya totalnya adalah merupakan hasil jumlah dari unit biaya tetap yang terjadi dengan biaya variabelnya

TC = FC + VC

= k + f(Q)

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa biaya rata-rata adalah merupakan biaya untuk satu satuan unit produksi, dengan demikian biaya rata-rata diartikan sebagai biaya total dibagi dengan jumlah unit yang diproduksi, secara matematis biaya rata-rata dituliskan:

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{TFC+TVC}{Q}$$

Di mana:

AC : *Average Cost* (biaya rata-rata)

Q : Jumlah unit barang

TFC : *Total Fixed Cost* (biaya tetap)

TVC : *Total Variable Cost* (biaya tidak tetap)

Fungsi biaya diasumsikan:

a. Jika tidak ada produk yang dihasilkan (Q = 0), maka biaya totalnya merupakan biaya tetapnya saja (*overhead*) atau 0 (nol).
b. Peningkatan biaya total sebanding dengan jumlah produk yang dibuat, sehingga biaya marginal selalu positif.
c. Untuk suatu produk yang jumlahnya sangat besar, biasanya akan terjadi perubahan laju yang makin tinggi, sehingga fungsi ini akan cenderung cekung ke atas. Namun demikian, hal tersebut tidak selalu terjadi demikian, karena

fungsi biaya dimungkinkan pula akan cenderung cekung ke bawah (sesuai dengan fungsi marginalnya yang menurun).

**2. Fungsi Marginal Cost**

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa *marginal cost* adalah tingkat perubahan dari biaya total (*Total cost*) terhadap perubahan satu unit produk yang dihasilkan, secara matematika fungsi *marginal cost* merupakan turunan pertama atau derivatif pertama dari fungsi total *cost*-nya, selanjutnya bentuk umum dari struktur fungsi *marginal cost* adalah sebagai berikut:

$$MC\,\frac{d_{TC}}{d_Q} = \frac{d_{\{k+f(Q)\}}}{d_Q}$$

**3. Model Fungsi Biaya**

**a. Fungsi Biaya Total Linear**

Secara umum bentuk fungsi biaya total linear dituliskan dalam bentuk:

$$TC = a + bQ$$

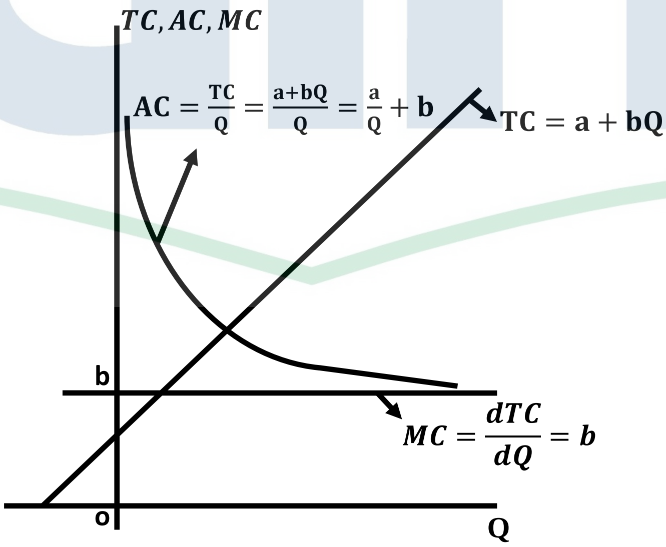
$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{a+bQ}{Q} = \frac{a}{Q} + b$$

$$MC = b$$

Di mana:

| | | | |
|---|---|---|---|
| TC | : *Total Cost;* | AC | : *Average Cost* |
| MC | : *Marginal Cost;* | Q | : Jumlah unit barang |
| a, b, c | : Konstanta | | |

Kurva:




*Gambar 8.1.*

### b. Fungsi Biaya Total Kuadrat

Secara umum bentuk fungsi biaya total linear dituliskan dalam bentuk:

$$TC = a + bQ + cQ^2$$

$$AC\frac{a}{Q} + b + cQ$$

$$MC\frac{dTC}{Q} + b + 2cQ$$

Di mana:

TC : *Total Cost*

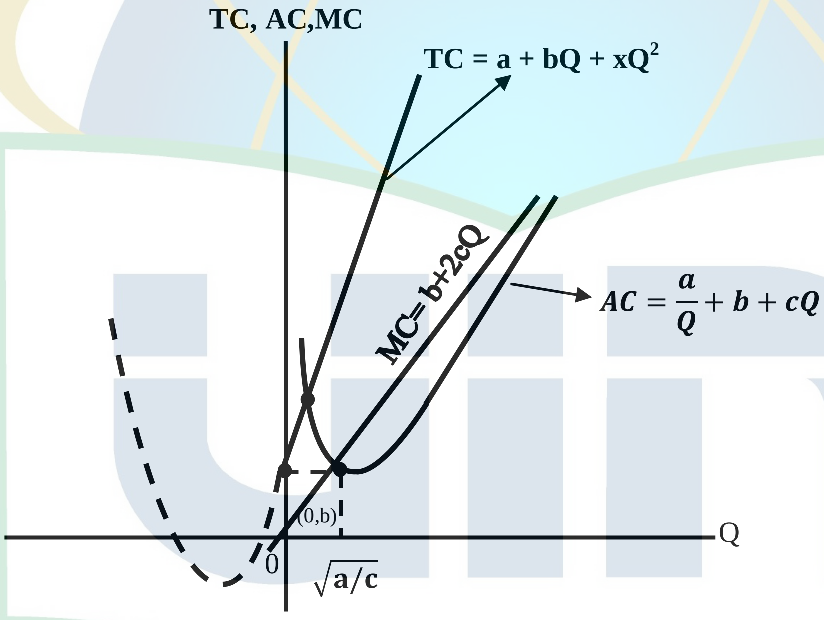
AC : *Average Cost*

MC : *Marginal Cost*

Q : Jumlah unit barang

a, b, c : Konstanta

Kurva:




*Gambar 8.2.*

Dari grafik fungsi pada Gambar 8.2. perhatikan biaya rata-rata:

$AC\frac{a}{Q} + b + cQ$

Biaya rata-rata minimum akan terjadi pada saat $\frac{d_{AC}}{d_Q} = 0$ (turunan pertama dari AC = 0), Sehingga:

$\frac{d_{AC}}{d_Q} = -\frac{a}{Q^2} + c - \frac{a}{Q^2} + c = 0 \rightarrow c\frac{a}{Q^2}$ atau $cQ^2 = a$

$\mathrm{Q} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}}$ (yang berlaku hanya yang positif)

Jadi, biaya rata-rata minimum akan terjadi pada saat: $\mathrm{Q} = \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}}$

### c. Fungsi Biaya Total Polinomial

Secara umum fungsi biaya polinomial tingkat lebih tinggi, dinyatakan:

$$\mathrm{TC} = \mathrm{aQ^n} + \mathrm{b}$$

$$\mathrm{AC}\,\frac{\mathrm{TC}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{aQ^n+b}}{\mathrm{Q}} \text{ atau } \mathrm{AC} = \mathrm{aQ^{n-1}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{Q}}$$

$$MC\,\frac{d_{TC}}{d_Q} = a(n)Q^{n-1}$$

Di mana:

TC : *Total Cost*

AC : *Average Cost*

MC : *Marginal Cost*

Q : Jumlah unit barang

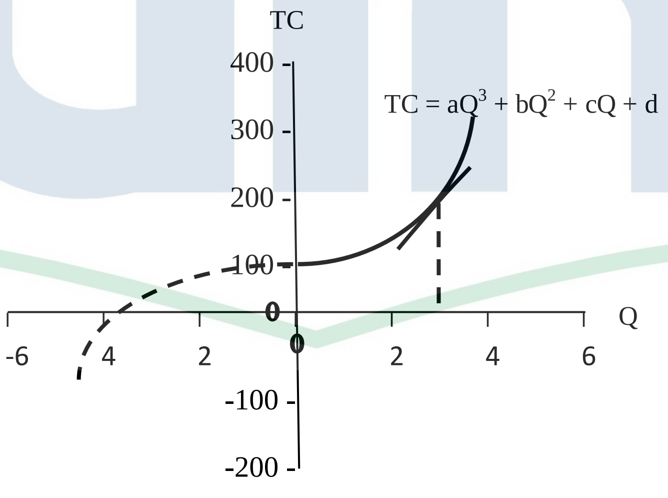
a, b : Konstanta (a > 0, n > 1, dan b ≥ 0)

Kurva:

- **Untuk Pangkat Ganji**

  **TC = aQ$^{\mathbf{n}}$ + b**

  **Jika n bilangan ganjil, maka kurvanya akan berbentuk:**

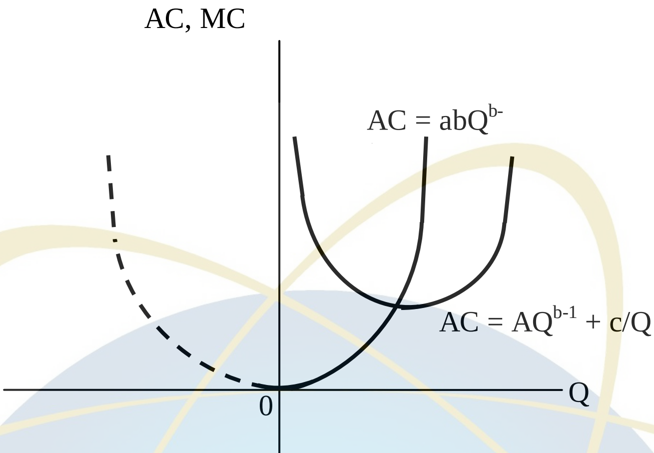



*Gambar 8.3.*

- **Untuk Pangkat Genap**

  **TC = aQ$^n$ + b**

  **Jika n bilangan genap, maka kurvanya akan berbentuk:**




*Gambar 8.4.*

**d. Fungsi Biaya Total Eksponensial**

Secara umum fungsi biaya total eksponensial ditulis:

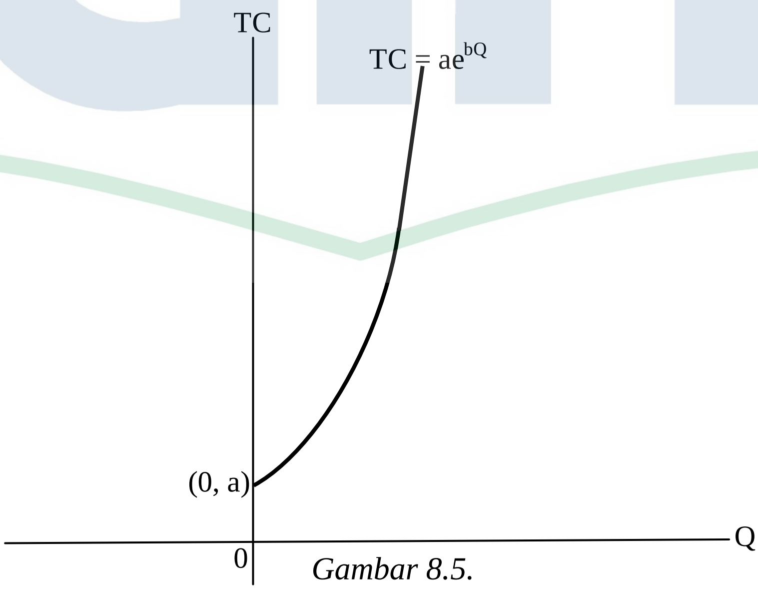
$$TC = ae^{bQ}; \qquad AC = \frac{TC}{Q} = \frac{ae^{bQ}}{Q}$$

$$MC = \frac{d_{TC}}{d_Q} = abe^{bQ}$$

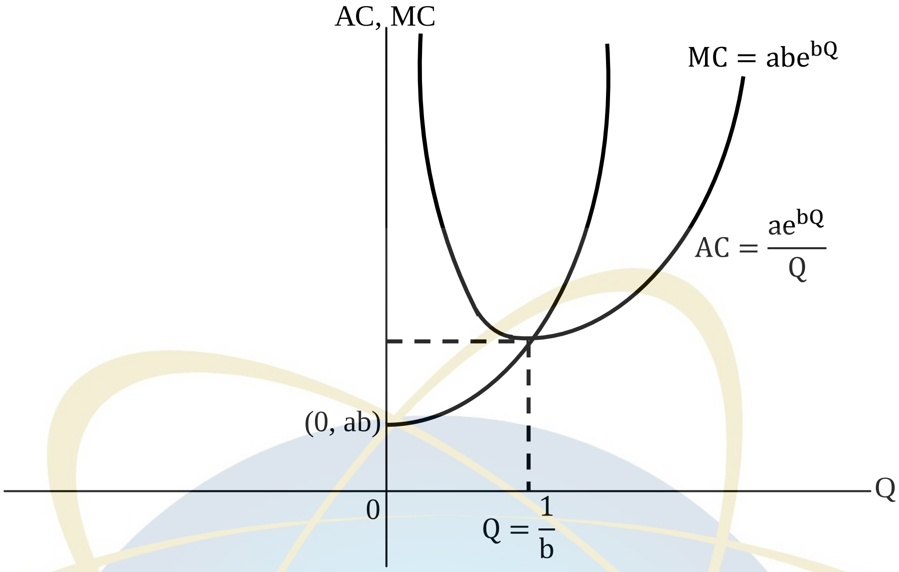
Di mana:

| | | | |
|---|---|---|---|
| TC | : *Total Cost;* | AC | : *Average Cost* |
| MC | : *Marginal Cost;* | Q | : Jumlah unit barang |
| a, b | : Konstanta (a > 0; b > 0; dan e = 2,7183) | | |

Kurva:




*Gambar 8.5.*




*Gambar 8.6.*

**e. Kurva Hubungan Fungsi Biaya Rata-rata dan Marginal Cost**

Hubungan antara fungsi biaya rata-rata dengan fungsi biaya marginal, dinyatakan oleh AC = MC, hal ini dimaksudkan bahwa pada saat biaya rata-rata sama dengan biaya marginalnya, maka biaya rata-rata pada saat itu menjadi minimum. Biaya rata-rata dikatakan minimum jika dipenuhi syarat: Turunan pertama dari biaya rata-rata sama dengan nol $\left(\frac{d_{AC}}{d_Q} = 0\right)$ dan turunan kedua dari biaya rata-rata tersebut lebih besar dari nol $\left(\frac{d^2AC}{d_{Q^2}} > 0\right)$, seperti berikut:

Perhatikan fungsi biaya rata-rata $\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{TC}}{\mathrm{Q}}$ dan fungsi biaya marginal $MC = \frac{d_{TC}}{d_Q}$. Dalam hal ini seperti di atas, nilai biaya rata-rata minimum akan sama dengan nilai biaya marginalnya, atau $AC_{min}$ = MC.

Kalau kita perhatikan fungsi dari biaya rata-rata (AC), maka turunan pertama dari fungsi ini akan didapat:

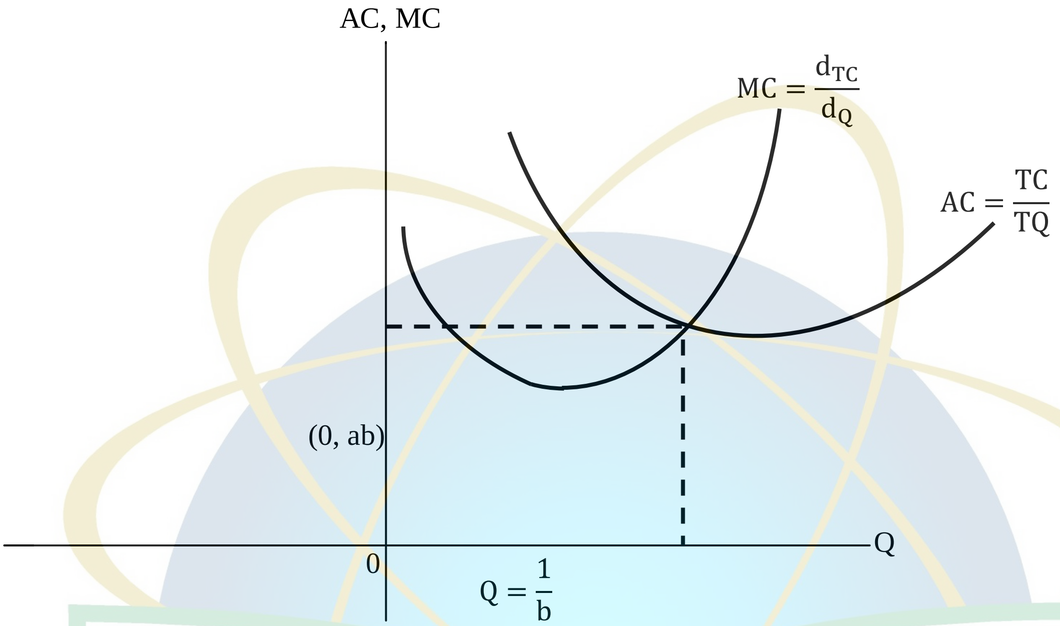
$$\frac{d_{AC}}{d_Q} = \frac{\frac{d_{TC}}{d_Q}(Q) - (TC)\left(\frac{d_Q}{d_Q}\right)}{Q^2} = \frac{\frac{d_{TC}}{d_Q}(Q) - (TC)}{Q^2}, untuk\ \frac{d_{AC}}{d_Q} = 0,$$

Maka turunan fungsi di atas, akan menjadi:

$$\frac{\frac{d_{TC}}{d_Q}(Q) - (TC)}{Q^2} = 0\ atau\ \frac{d_{TC}}{d_Q} = \frac{(TC)}{Q}$$

Untuk Q positif, maka turunan kedua pun akan didapati nilai positif $\frac{d^2TC}{dQ^2} > 0$,

Dengan demikian terbukti bahwa biaya marginal akan sama dengan biaya rata-rata minimum AC = MC (terbukti).




*Gambar 8.7.*

**4. Fungsi Penerimaan (Revenue)**

Dalam suatu proses produksi, dikenal juga dengan istilah penerimaan (*Revenue*). Penerimaan yang didapat dari seluruh proses produksi dikatakan sebagai penerimaan total (*Total Revenue*).

Penerimaan total adalah merupakan hasil kali antara jumlah yang diproduksi dengan harga yang ditawarkan secara matematis penerimaan total dituliskan:

TR = P . Q

Di mana:

TR : *Total Revenue*

P : Harga yang ditawarkan

Q : Jumlah unit barang yang diproduksi

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa penerimaan rata-rata adalah merupakan penerimaan untuk satu satuan unit produksi, dengan demikian penerimaan rata-rata diartikan sebagai penerimaan total dibagi dengan jumlah unit barang yang diproduksi atau merupakan fungsi permintaan, secara matematis penerimaan rata-rata dituliskan:

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{P \cdot Q}{Q} = P$$

Di mana:

AR : Penerimaan rata-rata (*Average Revenue*)

P : Harga

Q : Jumlah unit barang

**a. Fungsi Marginal Revenue**

Yang dimaksud dengan fungsi *marginal revenue* adalah tingkat perubahan dari penerimaan total (*Total Revenue*) terhadap perubahan satu unit produk yang terjual kepada konsumen atau merupakan fungsi turunan/derivatif dari fungsi *total revenue* ini antara lain adalah:

1. Fungsi *total revenue* pada pasar *perfect competitif* secara grafis merupakan fungsi linear yang melalui titik *origin*;
2. Fungsi *total revenue* pada pasar *imperfect competitif* secara grafis akan berbentuk fungsi parabola yang terbuka ke bawah.

   Kedua macam bentuk fungsi tersebut digambarkan seperti grafis di bawah ini.

   Bentuk umum dari fungsi *total revenue* adalah:

$$Total\ Revenue(TR) = f(Q)$$

$$Average\ Revenue\ (AR) = \frac{TR}{Q} = \frac{f(Q)}{Q}$$

$$Marginal\ Revenue\ (MR) = \frac{d_{TR}}{d_Q} = \frac{d_{f(Q)}}{d_Q}$$

Pada pasar *perfect competitif* fungsi *marginal revenue* sama dengan fungsi *average revenue*-nya (merupakan fungsi konstanta, pada grafik ditunjukkan Y = a), sedangkan pada pasar *imperfect competitif marginal revenue* tersebut merupakan garis-garis linear yang menyinggung grafik fungsi *total revenue*. Apabila kita perhatikan dari kedua bentuk fungsi di atas, maka besarnya *total revenue* dari masing-masing pasar cukup menonjol perbedaannya, seperti total penerimaan dari:

a. Pasar persaingan sempurna

   Batas total, penerimaan tak terbatas, artinya semakin banyak produksi yang bisa dibuat, maka semakin banyak pula penerimaan yang akan diperolehnya, hal ini dikarenakan bentuk fungsinya adalah fungsi linear

b. Pasar persaingan tak sempurna

Batas total penerimaan yang akan dicapai dari model pasar ini adalah terbatas, artinya bahwa dalam model fungsi semacam ini ada suatu batas tertentu atau produksi yang dapat dilakukan, sampai mencapai titik optimum dari penerimaannya c (hal ini disebabkan karena model fungsi *imperfect competitif* berbentuk parabola yang menghadap ke bawah, pada saat ini dikatakan bahwa *marginal revenue* adalah sama dengan nol atau dapat dikatakan pula untuk kondisi semacam ini antara lain adalah:

*Total revenue* dicapai pada saat *marginal revenue* sama dengan nol, di mana fungsi *marginal revenue* adalah merupakan derivatif pertama dari fungsi *total revenue*-nya. Jika diketahui fungsi *total revenue* sebagai berikut:

$(TR) = aQ^2 + bQ: a < 0$ maka:

$AR = \frac{aQ^2+bQ}{Q} = aQ + b$ dan MR = 2aQ + b

*Total revenue* maksimum, jika MR = 0, maka:

2aQ + b = 0 atau $Q = \frac{-b}{2 \cdot a}$

Apabila $Q = \frac{-b}{2 \cdot a}$ disubstitusikan ke dalam fungsi *total revenue*, maka *total revenue* maksimum tersebut dapat dihitung sebagai berikut:

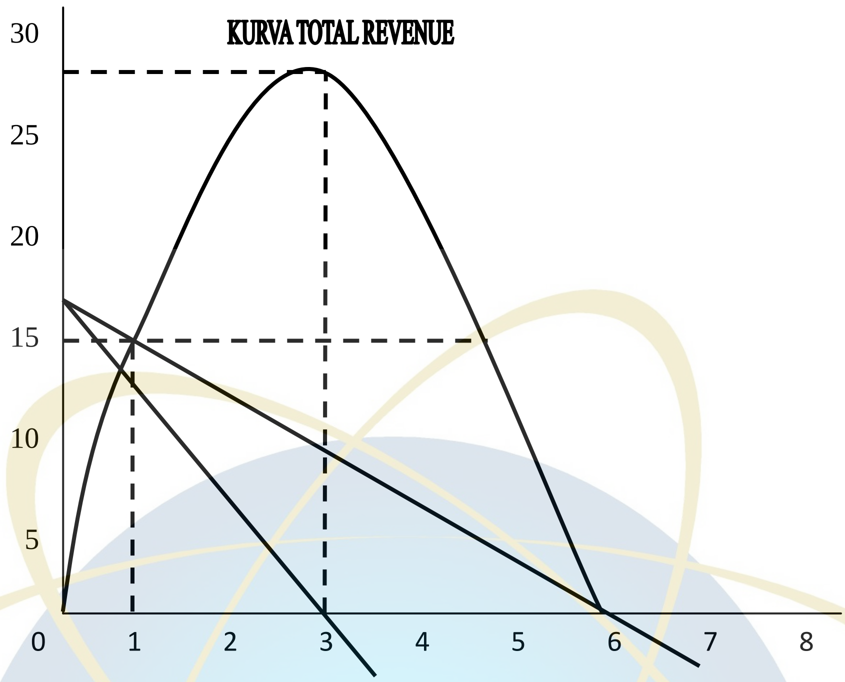
TR $= aQ^2 + bQ$

$= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right)$

$= \frac{ab^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a} = \frac{-b^2}{4a}$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas titik maksimumnya adalah berkoordinat di P$\left(\frac{-b}{2a}; \frac{b^2}{4a}\right)$, di mana $\frac{-b}{2a} = Q =$ unit produksi *total revenue* maksimum dan $\frac{-b}{4a} = R = total\, revenue$ maksimum.

Fungsi *marginal revenue* (MR) dan *average revenue* (AR) secara grafik pada pasar *imperfect cometitif* ini dapat digambarkan sebagai berikut:




*Gambar 8.8.*

Jika kita perhatikan grafik fungsi *total revenue* di atas, maka berarti *total revenue* maksimum berada pada saat MR = 0, yaitu terletak di puncak parabola dari fungsi *total revenue* dengan titik koordinat di P$\left(\frac{-b}{2a};\frac{b^2}{4a}\right)$

*Contoh:*

Misalkan diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah *P = 15 – 2Q*, tentukanlah berapa penerimaan marjinalnya.

Jawab:

$TR = P.Q = (15\text{-}2Q)\ Q = 15Q - 2Q^2$

Penerimaan marjinal:

$MR = 15 - 4Q$

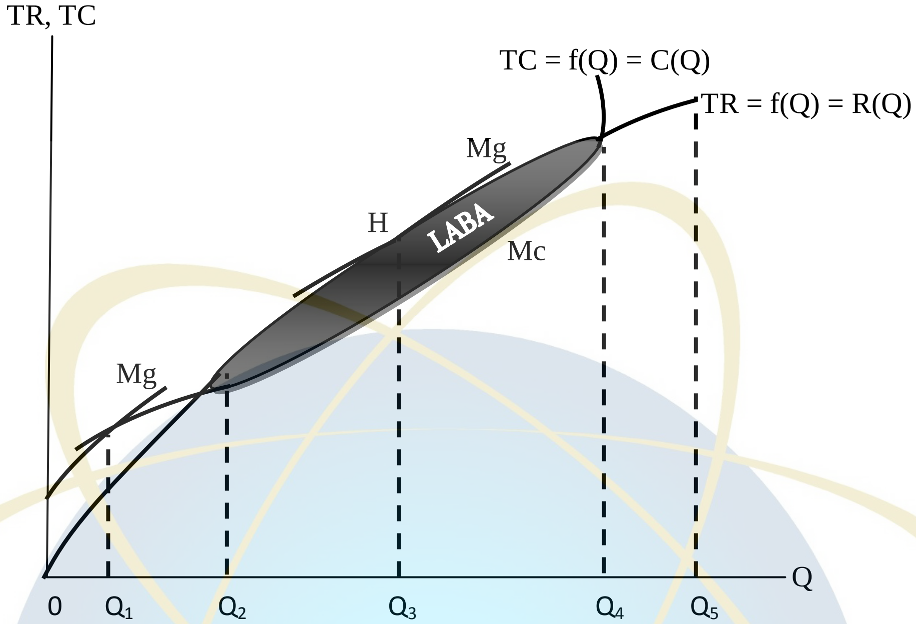
**5. Maksimum Profit**

Pada berbagai bentuk pasa, secara teoritis maksimum profit (keuntungan maksimum akan dapat dicapai pada saat *marginal revenue* sama dengan *marginal cost* (MR = MC) atau dengan kata lain, bahwa keuntungan akan diperoleh dari hasil selisih antara *total revenue* dengan *total cost*-nya bentuk umum untuk fungsi ini dinyatakan oleh:

$\pi$ = TR – TC fungsi keuntungan (laba)

$\pi_{max}$ adalah MR = MC

Atau $\frac{d_{TR}}{d_Q} = \frac{d_{TC}}{d_Q}$ secara grafik lihat grafik.




*Gambar 8.9.*

*Contoh:*

Jika diketahui fungsi permintaan adalah 1000 – 2Q, dan fungsi biaya total adalah $Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$. Hitunglah kondisi keuntungan maksimumnya.

Jawab:

Penerimaan total ($TR$) = $P.Q = (1000 - 2Q)Q = 1000Q - 2Q^2$

Kondisi keuntungan maksimum adalah ketika MR = MC

MR = TR’ = 1000 – 4Q

MC = TC’ = $3Q^2 - 118Q + 1315$

$\pi'$ : MR = MC

$1000 - 4Q = 3Q^2 - 118Q + 1315$

$-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$

$-Q^2 + 38Q - 105 = 0$

$(-Q - 3)(Q - 35) = 0$

Maka akan diperoleh $Q_1 = 3$ dan $Q_2 = 35$

Untuk mengetahui mana yang lebih memaksimalkan keuntungan adalah yang memiliki turunan kedua lebih besar daripada nol.

Turunan kedua: $\pi" = -6Q + 114$

Jika Q = 3, $\pi''$= -6 (3) + 114 = 96 > 0

Jika Q = 35, $\pi''$= -6 (35) + 114 = -96 < 0

Karena $\pi'' < 0$ untk $Q = 35$, maka tingkat produksi yang menghasilkan tingkat keuntungan maksimal adalah pada saat jumlah barang yang diproduksi sebanyak 35 unit. Adapun besarnya keuntungan adalah:

$$\pi = TR - TC$$
$$= -(35)^3 + 57\,(35)^2 - 315\,(35) - 2000$$
$$= 13.925$$

**6. Elastisitas**

Elastisitas untuk mengukur kepekaan dari satu variabel terhadap yang lainnya. Secara spesifik, elastisitas adalah suatu bilangan yang menginformasikan kepada kita persentase perubahan yang terjadi pada satu variabel sebagai reaksi terhadap perubahan 1 persen pada variabel lain, apakah ia akan bereaksi cukup signifikan ataukah tidak. Secara garis besar elastisitas akan dibagi menjadi elastisitas permintaan dan elastisitas penawaran. Produk yang memiliki sifat elastis berarti perubahan 1 persen atas suatu variabel akan berpengaruh signifikan terhadap keseluruhan perubahan. Sementara produk yang memiliki sifat inelastis berarti bahwa perubahan 1 persen terhadap suatu variabel tidak akan berpengaruh besar terhadap keseluruhan variabel.. Selanjutnya, tingkat elastisitas ini dibagi menjadi dua bagian antara lain:

- Elastisitas Permintaan
- Elastisitas Penawaran

Secara umum tingkat elastisitas dinyatakan dalam bentuk matematis, sebagai berikut:

$$\varepsilon = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$$

Tingkat perubahan tersebut, ditulis:

$$\varepsilon = \frac{\Delta_{Qx}}{Qx} \cdot \frac{P_x}{\Delta P_x} = \frac{\Delta_{Qx}}{\Delta_{Px}} \cdot \frac{P_x}{Q_x}$$

Di mana:

$\varepsilon$ : Elastisitas

$\Delta$ : Delta (tingkat perubahan)

Besaran nilai dari elastisitas adalah:

1) Inelastis ($\eta$ < 1)

   Perubahan permintaan (dalam persentase) lebih kecil daripada perubahan harga. Jika harga naik 10% menyebabkan permintaan barang turun sebesar , misalkan 5%. Contoh inelastis adalah permintaan barang kebutuhan pokok misalkan beras.

2) Elastis ($\eta$ > 1)

   Permintaan terhadap suatu barang dikatakan elastis bila perubahan harga suatu barang menyebabkan perubahan permintaan yang besar. Misalkan, bila harga turun 10% menyebabkan permintaan barang naik 20%. Karena itu nilai Eh lebih besar dari satu, barang mewah seperti mobil umumnya permintaan elastis

3) Elastis unitary ($\eta$ = 1)

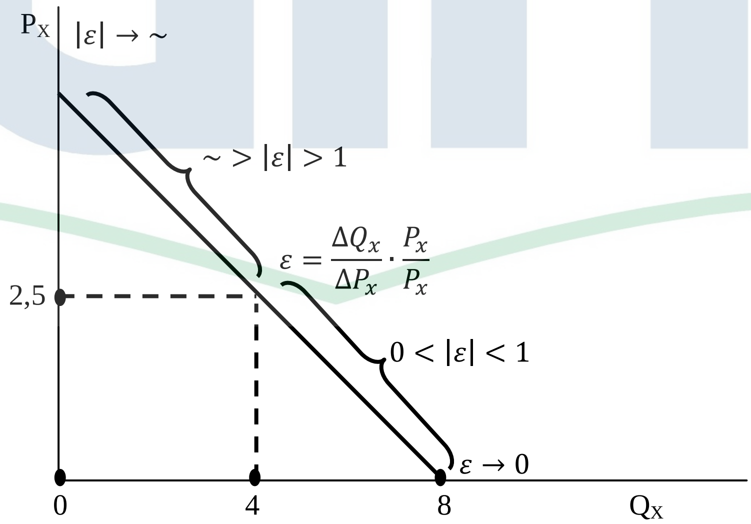
   Jika harga naik 10%, maka permintaan barang turun 10% juga.

4) Inelastis sempurna ($\eta$ = 0)

   Berapapun harga suatu barang, orang akan tetap membeli jumlah yang dibutuhkan. Contohnya adalah permintaan garam.

5) Elastis tak terhingga ($\eta$ = ~)

   Perubahan harga sedikit saja menyebabkan perubahan permintaan tak terhingga besarnya.




*Gambar 8.10.*

**a. Elastisitas Penerimaan (Demand Elasticity)**

Yang dimaksud dengan elastisitas penerimaan adalah rasio (angka perbandingan) antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta dengan persentase perubahan dari harga barang itu sendiri. Secara matematis elastisitas *demand* dapat dijabarkan dari fungsi Q = f(P)

Elastisitas demandnya:

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{d_P} . \frac{P_d}{Q_d} \cdot$$

Di mana:

P = Harga per unit

Q = Jumlah barang yang diminta

*Contoh:*

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 15 - 3P^2$. Tentukan elastisitas permintaan jika diketahui harga pasar adalah 4 ($P = 4$).

Jawab:

$$Q_d = 15 - 3P^2$$

$$Q'_d = \frac{dQ_d}{dp} = -6P$$

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{d_P} . \frac{P_d}{Q_d}$$

$$\eta_d = -6P . \frac{P}{15 - 3P^2}$$

$$\eta_d = -6(4) . \frac{4}{15 - 3(4)^2} = 2{,}91 \ (elastis)$$

$\eta_d = 2{,}91$ berarti produk ini memiliki tipikal elastisitas yang elastis, dimana memberikan makna bahwa apabila terdapat kenaikan harga sebesar 1% maka akan terdapat penurunan jumlah barang yang diminta sebesar 2,91%.

**b. Elastisitas Penawaran (Supply Elasticity)**

Yang dimaksud dengan elastisitas penawaran (*Supply*), adalah rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan dengan persentase perubahan dari harga barang itu sendiri. Secara matematis elastisitas *supply* dapat dijabarkan dari fungsi *supply*-nya sebagai berikut: Q = f(p)

Elastisitas *demand*-nya:

$$\varepsilon_d = \frac{P_S}{Q_S} \cdot \frac{d_Q}{d_P}$$

*Contoh:*

Jika diketahui fungsi penawaran suatu barang adalah $Q_s = -200 + 7P^2$. Hitunglah elastistitas penawarannya pada tingkat harga $P = 10$ dan $P = 15$

Jawab:

$Q_s = -200 + 7P^2$

$Q'_s = 14P$

$\eta_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s} = 14P \cdot \frac{P}{-200+7P^2}$

Pada $P = 10$, $\eta_s = 14(10) \cdot \frac{10}{-200+7(10)^2} = 2{,}8$

Pada $P = 15$, $\eta_s = 14(15) \cdot \frac{15}{-200+7(15)^2} = 2{,}3$

Berdasarkan perhitungan diatas, elastisitas penawaran berbentuk elastis.

**Latihan Soal**:

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi-fungsi di bawah ini:
   a. $y = 2x^3 + 5x^2 + 10x - 8$
   b. $y = 10 - 5x^{-1} + 4x^{-2}$
   c. $y = (x^2 - 4)(2x - 6)$
   d. $y = \frac{x^2-4}{2x-6}$
   e. $y = (3x^2 - x)\left(\frac{5x+2}{x}\right)$
   f. . $y = \log\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$
   g. $y = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$
   h. $xy - x^2 + y^2 = -78$
   i. $y = x^2 e^{x^2+5x-3}$
   j. $x = 4y + 8 - y^{-2}$
2. Misalkan $y = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 5$. Tentukan apakah $dy/dx$ apakah "*over-estimated*" ataukah "*under-estimated*" sebagai penaksir $\Delta y/\Delta x$ pada $x = 3$ untuk $\Delta x = 0{,}02$
3. Dari fungsi-fungsi dibawah ini, buatlah turunan pertama sampai dengan turunan ketiganya:
   a. $y = x^3 - 10x^2 + 15x + 25$

b. $y = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 10x + 50$

c. $y = (5x + 12 - 2x^{-1})^3$

d. $y = \left(\frac{5x+2}{x}\right)^2$

e. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

4. Misalkan seorang monopolis menghadapi fungsi permintaan $Q = 100 - 5P$, dan fungsi biaya totalnya adalah $C = 20 - 4Q + 0{,}1\ Q^2$. Hitunglah kondisi jumlah produksi barang yang memaksimumkan keuntungan?

# BAB 9

# DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK

Apabila pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai diferensial untuk bentuk fungsi yang sederhana, maka pada bab ini akan dibahas diferensiasi bagi fungsi yang terdapat lebih dari satu macam variabel bebas. Secara prinsip dasar tidak terdapat perbedaan antara diferensial untuk variabel bebas tunggal dengan yang memiliki fungsi majemuk. Pada bahasan ini akan diperkenalkan konsep diferensial parsial dan diferensial total. Hal ini perlu diperkenalkan mengingat pada umumnya suatu variabel ekonomi berhubungan fungsional terhadap tidak hanya satu macam variabel lain, tetapi justru terhadap beberapa macam variabel sekaligus. Oleh karenanya pengetahuan akan diferensial untuk fungsi majemuk sangat penting dimiliki, terutama dalam proses optimisasi fungsi di dalam ilmu ekonomi.

## A. Diferensial Parsial

Suatu fungsi yang di dalamnya hanya mengandung satu variabel bebas, maka hanya akan memiliki satu macam turunan saja. Apabila $y = f(x)$ maka turunannya hanyalah turunan $y$ terhadap $x$, dengan kata lain $y' = dy / dx$.

Bagaimanakah jika suatu fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas? Jika suatu fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, maka turunannya akan lebih dari satu macam pula, sesuai dengan jumlah macam variabel bebasnya. Jadi, jika sebuah fungsi mempunyai $n$ macam variabel bebas maka ia akan memiliki $n$ macam turunan. Jika $y = f(x, z)$ maka akan terdapat dua macam turunan, yaitu turunan $y$ terhadap $x$ atau $\partial y / \partial x$ dan turunan $y$ terhadap $z$ atau $\partial y / \delta z$. Hal ini dapat terlihat pada contoh di bawah ini:

1. Jika terdapat $y = f(v, x)$

$$y' \begin{cases} a)\ f_v(v,x) = \frac{\partial y}{\partial v} \\ b)\ f_x(v,x) = \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial v}\, dv + \frac{\partial y}{\partial x}\, dx.$$

2. $p = f(q, r, s)$

$$p' \begin{cases} a)\ f_q(q,r,s) = \frac{\partial\, p}{\partial\, q} \\ b)\ f_r(q,r,s) = \frac{\partial\, p}{\partial\, r} \\ a)\ f_s(q,r,s) = \frac{\partial\, p}{\partial\, s} \end{cases}$$

$$dp = \frac{\partial\, p}{\partial\, q}\, dq + \frac{\partial\, p}{\partial\, r}\, dr + \frac{\partial\, p}{\partial\, s}\, ds$$

$\partial\, y/\partial\, v$ dan $\partial\, y/\partial\, x$ dalam butir 1 serta $\partial\, p/\partial\, q, \partial\, p/\partial\, r$ dan $\partial\, p/\partial\, s$ dalam butir 2 masing-masing dinamakan derivatif parsial. Sedangkan $(\partial\, y/\partial\, x)dx$, $(\partial\, y/\partial\, z)dz$ , $(\partial\, p/\partial\ q)dq$ , $(\partial\, p/\partial\ r)dr$ dan $(\partial\, p/\partial\ s)ds$ dinamakan diferensial parsial. Adapun *dy* dan *dp* dinamakan diferensial total.

Dalam menurunkan *y* terhadap *v* yang dilambangkan dengan $\partial\, y/\partial\, v$, hanya suku-suku yang mengandung variabel *v* yang diperhitungkan; sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel *v* dianggap sebagai konstanta dan turunannya adalah nol. Di lain pihak, dalam menurunkan *y* terhadap *x* yang dilambangkan dengan $\partial\, y/\partial\, x$, hanya suku-suku yang mengandung variabel *x* yang diperhitungkan; sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel *x* dianggap konstanta dan turunannya adalah nol.

Dalam perspektif ekonomi diferensial parsial dari suatu fungsi adalah menggambarkan bagaimanakah dampak perubahan suatu variabel apabila variabel lain dianggap konstan atau biasa dikenal dengan asumsi *ceteris paribus*. Sehingga jika $\partial\, y/\partial\, v$ merupakan turunan dari suatu fungsi $y = f\ (v,x)$, hal ini memberikan makna bagaimanakah dampak perubahan variabel *v* terhadap variabel *y*, jika variabel lain diasumsikan tidak berubah.

## B. Derivatif Dari Derivatif Parsial

Fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas dapat diturunkan lebih dari satu kali sebagaimana halnya dalam fungsi dengan satu variabel bebas. Oleh karenanya dari masing-masing turunan parsial masih memiliki kemungkinan untuk dapat diturunkan kembali. Apabila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang tinggal mengandung satu macam variabel bebas, maka turunan berikutnya hanya ada satu macam. Akan tetapi bila turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang masih mengandung beberapa macam variabel bebas, maka turunan berikutnya masih dapat dipecah-pecah lagi menjadi beberapa turunan parsial pula.

*Contoh:* $y = x^3 + 6z^2 - 5x^2z - 4xz^2 + 9z - 10$

(1) $\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 10xz - 4z^2$

(2) $\frac{\partial y}{\partial z} = 12z - 5x^2 - 8xz + 9$

Dalam contoh ini baik $\partial y / \partial x$ maupun $\partial y / \partial z$ masih dapat diturunkan secara parsial lagi terhadap *x* maupun *z*.

(1.a) $\frac{\partial y}{\partial x}$ terhadap $x$ : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x - 10z$

(1.b) $\frac{\partial y}{\partial x}$ terhadap $z$ : $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -10x - 8z$

(2.a) $\frac{\partial y}{\partial z}$ terhadap $x$ : $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = -10x - 8z$

(2.b) $\frac{\partial y}{\partial z}$ terhadap $z$ : $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 12 - 8x$

Ternyata turunan parsial kedua (1a), (1b), (2a) dan (2b) masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap *x* maupun terhadap *z*.

(1a.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ terhadap $x$ : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^3} = 6$

(1a.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ terhadap $z$ : $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial z} = -10$

(1b.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ terhadap $x$ : $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial z} = -10$

(1b.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ terhadap z: $\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial z^2} = -8$

(2a.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$ terhadap $x$ : $\frac{\partial^3 y}{\partial z \partial x^2} = -10$

(2a.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$ terhadap z: $\frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial x} = -8$

(2b.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ terhadap $x$ : $\frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial x} = -8$

(2b.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ terhadap $z$ : $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} = 0$

Sekarang turunan-turunan parsial ketiga ini tidak dapat lagi diturunkan secara parsial, karena masing-masing hanya tinggal mengandung konstanta.

### C. Optimisasi dan Nilai Ekstrim

Setelah kita mampu memahami apa itu derivasi parsial, maka selanjutnya kita perlu mengetahui nilai ekstrem dari suatu fungsi. Kegunaan dari mengetahui nilai ekstrem ini adalah sebagai upaya dalam mencari suatu fungsi yang bersifat maksimisasi dan suatu fungsi yang bersifat minimisasi. Hal ini perlu dipahami mengingat ilmu ekonomi adalah ilmu yang mempelajari bagaimana melakukan pemilihan yang terbaik di antara pilihan yang ada dalam konteks keseimbangan.

Misalkan seorang produsen dihadapkan pada permasalahan menentukan besarnya produksi agar keuntungan yang diraih dapat optimal (maksimal) dengan memperhatikan berbagai keseimbangan antara sumber daya yang ada. Konsep optimisasi yang dapat dilakukan menurut Chiang (2005) disebut dengan "*The Guest for The Best*", yaitu melakukan pilihan-pilihan yang tepat di antara pilihan yang ada tersebut.

Nilai-nilai ekstrem (optimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan pengujian sampai derivatif keduanya:

Untuk $y = f(x, z)$,

Maka $y$ akan mencapai titik ekstrimnya jika:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \;\; dan \;\; \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

Pengujian di atas merupakan pengujian tes derivatif pertama (*first order condition*). Langkah-langkah yang perlu diperhatikan pada penggunaan uji ini adalah (Chiang, 2005):

- Mencari nilai ekstrim $x = x_0$ dengan cara derivatif pertama dari fungsi tersebut sama dengan non atau $f'x = 0$.
- Menyelidiki perubahan tanda yang mungkin terjadi di sekitar nilai ekstrim $x = x_0$
  (1) $x = x_0$ merupakan titik relatif maksimum jika $f'(x)$ tandanya berubah dari + ke – di sekitar $x_0$.
  (2) $x = x_0$ merupakan titik relatif minimum jika $f'(x)$ tandanya berubah dari – ke + di sekitar $x_0$.
  (3) $x = x_0$ bukan merupakan titik relatif minimum atau maksimum (kemungkinan adalah titik belok) jika $f'(x)$ tandanya sama di sekitar $x_0$.

*Contoh:*

$AC = f(Q) = Q^2 - 5Q + 20$, tentukanlah titik ekstrimnya.

Jawab:

$f'(Q) = 2Q - 5 = 0$

$Q = \frac{5}{2}$ → titik stasioner

Misal ambil $Q_1 = 2$ → $f'(2) = 2(2) - 5 = -1 < 0$

$Q_2 = 3 \rightarrow f'(3) = 2(3) - 5 = 1 > 0$

Berarti Q = $\frac{5}{2}$ adalah titik relatif minimum.

Karena derivatif pertama *f'(x)* adalah suatu fungsi dari *x*, maka *f'(x)* dapat didiferensialkan lagi terhadap *x* menjadi derivatif kedua dari fungsi *f(x)*, yang dapat dinotasikan dengan:

$$f''(x) \; atau \; \frac{d^2y}{dx^2}$$

Jika derivatif kedua *f"(x)* didifferensialkan lagi terhadap *x* menjadi derivatif ketiga, maka dinotasikan dengan:

$$f'''(x) \; atau \; \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ dst}$$

Lalu sebenarnya bagaimanakah interpretasi dari derivatif kedua ini? Jika fungsi derivatif pertama *f'(x)* mengukur tingkat perubahan dari fungsi *f(x)*, maka fungsi derivatif kedua *f"(x)* mengukur tingkat perubahan dari fungsi derivatif pertama *f'(x)*. Atau dapat pula dikatakan bahwa derivatif kedua mengukur tingkat perubahan dari tingkat perubahan dari fungsi asli *f(x)*.

Misal akan dianalisis fungsi *f(x)* di titik $x = x_0$

Berdasarkan derivatif pertama:

$$\left.\begin{matrix} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{matrix}\right\} \; artinya \; nilai \; fungsi \; \begin{cases} meningkat \\ menurun \end{cases}$$

Berdasarkan derivatif kedua:

$$\left.\begin{matrix} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{matrix}\right\} \; artinya \; slope \; fungsi \; \begin{cases} meningkat \\ menurun \end{cases}$$

Cara pengujian lain yang digunaka untuk menentukan titik ekstrim dari suatu fungsi adalah uji derivatif kedua (*second order condition*). Langkah-langkah yang perlu diperhatikan pada penggunaan uji ini adalah:

- Mencari nilai ekstrim $x = x_0$ dengan cara derivatif pertama dari fungsi tersebut sama dengan nol atau *f'(x)* = 0.
- Tentukan derivatif kedua atau *f"(x)* dari fungsi tersebut.
- Subtitusikan nilai ekstrim $x = x_0$ ke dalam derivatif kedua.

  (1) $x = x_0$ merupakan titik relatif maksimum jika *f"(x)* < 0

  (2) $x = x_0$ merupakan titik relatif minimum jika *f"(x)* > 0

(3) $x = x_0$ tidak dapat disimpulkan secara pasti atau uji derivatif kedua gagal jika $f''(x) = 0$.

Uji derivatif kedua berhubungan dengan kecekungan dari kurva suatu fungsi. Cara menguji kecekungan yaitu:

(a) Jika $f''(x) < 0$, maka fungsi cekung ke bawah (*concave*).

(b) Jika $f''(x) > 0$, maka fungsi cekung ke atas (*convex*).

Titik belok (*inflection point*) adalah suatu titik dimana kecekungan berubah. Cara mencari titik belok adalah mencari solusi dari $f''(x) = 0$. Berikut adalah resume tabel dari kondisi relatif ekstrim $y = f(x)$.

| Kondisi | Maksimum | Minimum |
|---|---|---|
| FONC | $f'(x) = 0$ | $f'(x) = 0$ |
| SONC | $f''(x) \leq 0$ | $f''(x) \geq 0$ |
| SOSC | $f''(x) < 0$ | $f''(x) > 0$ |

Contoh:

Jika diketahui fungsi penerimaan: $R(Q) = 1200Q - 2Q^2$ dan fungsi biaya adalah $C(Q) = Q^3 - 61{,}25Q^2 + 1528{,}5Q + 3000$. Tentukanlah berapa nilai Q yang akan memaksimumkan keuntungan serta perlihatkan bahwa turunan keduanya terpenuhi.

Jawab:

Kondisi keuntungan maksimum adalah pada saat MR = MC, yaitu kondisi pada saat turunan pertama dari fungsi.

Keuntungan: $\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$

$= 1200Q - 2Q^2 - (Q^3 - 61{,}25Q^2 + 1528{,}5Q + 3000)$

$= -Q^3 + 59{,}25Q^2 - 328{,}5Q - 3000$

Kondisi turunan pertama (*first order condition*)

$\pi'(Q) = 0 \rightarrow \pi'(Q) = -3Q^2 + 118{,}5Q - 328{,}5 = 0$

Kedua ruas dikalikan dengan $-\frac{1}{3}$:

$Q^2 - 39{,}5Q + 109{,}5 = 0$

(Q-3) (Q-36,5)

$Q_1 = 3$; $Q_2 = 36{,}5$

Kondisi derivatif kedua (*second order condition*)

$\pi$" (Q) = -6*Q* + *118,5*

Q = 3 → $\pi$" (3) = -6 (3) + 118,5 = 100,5 > 0

Q = 36,5 → $\pi$" (36,5) = -6 (36,5) + 118,5 = -100,5 < 0

Berdasarkan derivatif kedua, $\pi$" (36,5) < 0, maka keuntungan maksimum akan diperoleh perusahaan pada saat memproduksi sebanyak 36,5 unit.

## D. Optimisasi Tanpa Kendala

Pada bagian ini kita akan membahas bagaimanakah cara mengoptimumkan suatu fungsi baik dalam mencari nilai maksimum maupun nilai minimum yang tidak memiliki kendala (*constraints*). Pada bagian sebelumnya apabila kita memiliki suatu fungsi dengan satu variabel bebas

$z = f(x)$

maka syarat perlu dan cukup (*necessary and sufficient condition)* bagi fungsi tersebut adalah:

- Turunan pertama: $dz = f'(x)\,dx = 0$ atau $\frac{dz}{dx} = f'(x) = 0$
- Kondisi turunan kedua yang harus dipenuhi

  $$f''(x) = \frac{d^2z}{dx^2}\begin{cases} \leq 0 \rightarrow max \\ \geq 0 \rightarrow min \end{cases}$$

Kemudian misalkan saat ini kita memiliki fungsi dengan dua variabel bebas

$Z = f(x,y)$

Maka syarat perlu dan cukup bagi fungsi tersebut adalah:

- Turunan pertama

  $f_x = f_y = 0$ atau $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

- Turunan kedua derivatif parsial

  Diketahui $f_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$ dan $f_y \equiv \frac{dz}{dy}$, maka

  $f_{xx} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f_x$ atau $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

  $f_{yy} \equiv \frac{\partial}{\partial y} f_y$ atau $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

  $f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ dan $f_{yx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

- Turunan kedua total diferensial

  Karena $dz = f_x\,dx + f_y\,dy$, maka

  $$d^2z \equiv d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy$$

$$= \frac{\partial(f_x dx + f_y dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(f_x dx + f_y dy)}{\partial y} dy$$
$$= f_{xx} dx + f_{yx} dy\, dx + f_{xy} dx + f_{yy} dy\, dy$$
$$= f_{xx} dx^2 + f_{yx} dy\, dx + f_{xy} dx\, dy + f_{yy} dy^2$$

Berdasarkan Teorema Young, $f_{xy} = f_{yx}$ selama masing-masing derivatif parsial tersebut kontinu. Oleh karenanya persamaan diatas dapat dituliskan kembali

$$d^2z = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dxdy + f_{yy} dy^2$$

Jadi untuk masalah optimisasi dua variabel, kondisi turunannya adalah:

$$SOSC: \begin{matrix} Max \rightarrow d^2z \leq 0 \\ Min \rightarrow d^2z \geq 0 \end{matrix}$$

Dimana $d^2z \begin{cases} < 0\ iff\ \ f_{xx} < 0;\ f_{yy} < 0;\ f_{xx}f_{yy} > f_{xy}{}^2 \\ > 0\ iff\, f_{xx} > 0;\ f_{yy} > 0;\ f_{xx}f_{yy} > f_{xy}{}^2 \end{cases}$

Jika disimpulkan, tabel kondisi untuk relatif ekstrem $z = f(x,y)$:

| Kondisi | Maksimum | Minimum |
|---|---|---|
| FONC | $f_x = f_y = 0$ | $f_x = f_y = 0$ |
| SOSC | $f_{xx} < 0;\ f_{yy} < 0;\ f_{xx}f_{yy} > f_{xy}{}^2$ | $f_{xx} > 0;\ f_{yy} > 0;\ f_{xx}f_{yy} > f_{xy}{}^2$ |

## E. Optimisasi Dengan Kendala Persamaan

Pada saat kita mengekstrimkan atau mengoptimumkan suatu fungsi baik untuk mencari nilai maksimum maupun nilai minimun, seringkali kita terkendala oleh suatu fungsi lain yang harus dipenuhi. Terdapat kendala (*constraint*) ketika hendak mengoptimumkan suatu fungsi. Kasus optimisasi bersyarat semacam ini banyak dijumpai dalam bidang ekonomi. misalnya seseorang hendak memaksimumkan utilitas, tetapi memiliki kendala pada fungsi pendapatan; atau sebuah perusahaan ingin memaksimumkan labanya, namun terikat pada fungsi produksi.; atau perusahaan ingin memaksimumkan jumlah output, namun terkendala pada fungsi biayanya. Pada bagian ini kita akan berupaya menjelaskan bagaimanakah cara mengoptimumkan suatu fungsi yang memiliki kendala.

Dalam melakukan perhitungan suatu fungsi yang memiliki kendala berupa suatu fungsi lain dapat diselesaikan dengan metode Lagrange. Caranya ialah dengan membentuk sebuah fungsi baru, disebut fungsi Lagrange, yang merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimumkan ditambah hasil kali pengganda Lagrange $\lambda$ dengan fungsi kendalanya.

Misalkan hendak dioptimumkan

*U =f(x,y)*

dengan kendala *g (x, y) = c*

maka fungsi Lagrangenya:

$$Z = f(x, y) + \lambda\,[c - g(x, y)]$$

Dimana $\lambda$ adalah lagrangne multiplier. Untuk mencari titik stasioner dari *Z*, maka dilakukan *FONC (first order necessary condition*).

FONC:

$Z_x = 0 \rightarrow f_x - \lambda g_x = 0$

$Z_y = 0 \rightarrow f_y - \lambda g_y = 0$

$Z_\lambda = 0 \rightarrow c - g(x,y) = 0$

Contoh:

Tentukan nilai ekstrem dari:

$U = x_1 x_2$

$s.t. x_1 + x_2 = 6$

Maka fungsi Lagrange: $Z = x_1 x_2 + \lambda(6 - x_1 + x_2)$

FONC: $Z_{x_1} = 0 \rightarrow x_2 - \lambda = 0$

$Z_{x_2} = 0 \rightarrow x_1 - \lambda = 0$

$Z_\lambda = 0 \rightarrow 6 - x_1 - x_2 = 0$

Dengan metode Cramer diperoleh solusi: $x_1* = 3$; $x_2* = 3$; $\lambda* = 3$. Dengan demikian, nilai optimumnya: $Z* = U* = 9$.

Pengganda Lagrange $\lambda$ adalah suatu *variabel tak-tentu* yang hanya bersifat sebagai pembantu. Syarat di atas merupakan syarat yang diperlukan untuk menghitung nilai ekstrim dari fungsi baru yang dibentuk, dan karenanya disebut sebagai syarat yang diperlukan atau *necessary condition*.

Selanjutnya nilai ini akan diuji dengan *second order sufficient condition (SOSC)* untuk mengetahui apakah nilai optimum (stasioner) ini akan maksimum, minimum, atau bukan keduanya. Akan tetapi untuk mengetahui jenis nilai ekstrim tersebut, maksimum ataukah minimum, masih harus disidik melalui derivatif-parsial keduanya, yang merupakan syarat yang mencukupkan atau *sufficient condition*. Dalam hal ini nilai ekstrim tadi adalah:

Maksimum bila $F_{xx} < 0\ dan\ F_{yy} < 0$

Minimum bila $F_{xx} > 0 \; dan \; F_{yy} > 0$

Contoh:

Tentukan nilai ekstrim *z* dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x^2 + y^2 = 8$. Jelaskan jenis nilai ekstrimnya.

Fungsi lagrange:

$\mathcal{L} = 2x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$

Untuk menentukan nilai ekstrim maka fungsi lagrange diatas $\mathcal{L}' = 0$

$\mathcal{L}_x = 2 + 2\lambda x = 0$ ..............................................(1)

$\mathcal{L}_y = 2 + 2\lambda y = 0$ ..............................................(2)

Dari persamaan 1 dan 2 karena sama-sama terdapat komponen $\lambda$ di dalamnya, maka menjadi : $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$ atau $x = y$

Menurut fungsi kendala: $x^2 + y^2 = 8$

karena $x = y$, maka dituliskan menjadi: $y^2 + y^2 = 8$

$2y^2 = 8$

$y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

karena $y = \pm 2$, $x = \pm 2$

maka, $z = 2x + 2y = \pm 8$

jadi nilai ekstrimnya:

- Untuk $x = 2$ dan $y = 2$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

  $\mathcal{L}_{xx} = 2\lambda = 1 < 0$

  $\mathcal{L}_{yy} = 2\lambda = 1 < 0$

  Karena $\mathcal{L}_{xx}$ dan $\mathcal{L}_{yy} < 0$, nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $z_{min} = 8$

- Untuk $x = -2$ dan $y = -2$, $\lambda = \frac{1}{2}$

  $\mathcal{L}_{xx} = 2\lambda = 1 > 0$

  $\mathcal{L}_{yy} = 2\lambda = 1 > 0$

  Karena $\mathcal{L}_{xx}$ dan $\mathcal{L}_{yy} > 0$, nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $z_{min} = -8$

*Contoh:*

Optimumkan fungsi $z = xy$ dengan kendala $2x + y = 20$

$\mathcal{L} = xy + \lambda(2x + y - 20)$

Syarat yang diperlukan untuk fungsi yang optimum ialah pada kondisi *FONC* = 0

$\mathcal{L}_x = y + 2\lambda = 0$ .....................................(1)

$\mathcal{L}_y = x + \lambda = 0$ .....................................(2)

Dari persamaan (1) dan (2) akan diperoleh

$-x = -\frac{1}{2}y$, berarti $2x = y$

$2x + y = 20$

$2x + 2x = 20$, diperoleh $x = 5$, maka $y = 10$

Jadi $z$ optimum pada $x = 5$ dan $y = 10$

Dengan $z_{opt} = xy = (5)\ (10) = 50$

## F. Optimisasi Dengan Kendala Pertidaksamaan

Pengembangan lebih lanjut dari model optimisasi bersyarat adalah metode Khun Tucker. Apabila dalam metode Lagrange berupaya melakukan optimisasi suatu fungsi terhadap kendala berbentuk persamaan, maka pada metode Khun-Tucker kita akan melakukan optimisasi suatu fungsi terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Apabila dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala yang berbentuk linier dikenal dengan *linear programming*, maka pada fungsi kendala atau tujuan yang tidak linier disebut dengan *non-linear programming*. Bentuk permasalahannya biasanya berupa:

Maksimum fungsi tujuan $f(x,y)$ terhadap kendala $g(z,y) \leq 0$

atau

minimum fungsi tujuan $f(x,y)$ terhadap kendala $g(x,y) \geq 0$

Prosedur penyelesaian pada permasalahan di atas dapat dilakukan dengan dua macam cara, yaitu (Dumairy, 2007): melalui metode Lagrange yang dimodifikasi kemudian diuji dengan kondisi (persyaratan) Kuhn-Tucker; atau; secara langsung dengan metode Kuhn-Tucker itu sendiri.

Prosedur metoda Kuhn-Tucker melalui metoda Lagrange yang dimodifikasikan dilakukan sebagai berikut (Dumairy, 2007):

(1) Anggap kendala pertidaksamaannya sebagai sebuah persamaan. Kemudian selesaikan masalahnya dengan metoda Lagrange yang biasa hingga diperoleh nilai optimum yang dicari [khusus dalam hal ini fungsi baru Lagrange harus dibentuk dengan cara: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$; jadi, tidak boleh: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$].

(2) Lakukan pengujian terhadap nilai $\lambda$. Jika $\lambda > 0$ berarti nilai optimum yang diperoleh (berdasarkan kendala yang telah dimodifikasikan) tadi juga merupakan nilai optimum berkenaan fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Jika $\lambda \leq 0$ berarti optimisasi fungsi tujuan *f(x,y)* tanpa menyertakan fungsi kendala *g(x,y)* sudah dengan sendirinya akan memenuhi kendalanya. [Dalam hal $\lambda \leq 0$ kendala yang bersangkutan dikatakan bersifat tidak mengikat (*non-binding*), oleh karenanya dapat diabaikan; dalam hal $\lambda > 0$ kendalanya disebut mengikat (*binding*).

Sedangkan prosedur metoda Kuhn-Tucker secara langsung dilakukan sebagai berikut (Dumairy, 2007):

(1) Rumuskan permasalahannya, misalnya maksimumkan *f(x,y)* terhadap *g(x,y)* ≤ 0, atau minimumkan *f(x,y)* terhadap *g(x,y)* ≥ 0.

(2) Tetapkan kondisi Kuhn-Tucker:

(a) $\frac{\partial\, f(x,y)}{\partial\, x} - \lambda \frac{\partial\, g(x,y)}{\partial\, x} = 0$

(b) $\frac{\partial\, f(x,y)}{\partial\, y} - \lambda \frac{\partial\, g(x,y)}{\partial\, y} = 0$

(c) $\lambda\, g\,(x, y) = 0$ di mana $g\,(x, y) \leq 0\; atau\; g\,(x, y) \geq 0$

(3) Ujilah (2c) masing-masing untuk $\lambda = 0$ dan *g* (*x*,*y*) = 0 guna menentukan mana diantaranya yang memenuhi persamaan-persamaan (2a) dan (2b) serta pertidaksamaan kendala *g*(*x*,*y*). Nilai-nilai *x* dan *y* yang memenuhi ketiga kondisi ini merupakan nilai-nilai yang mengoptimumkan fungsi tujuan *f*(*x*,*y*).

*Contoh*:

(1) Maksimumkan $f(x, y) = 10\, xy - 2{,}5\, x^2 - y^2$ terhadap kendala $x + y \leq 9$.

Dengan menganggap kendala pertidaksamaan berlaku sebagai sebuah persamaan ($x + y \leq 9$ menjadi $x + y = 9$), maka berdasarkan metoda Lagrange:

$$F(x, y, \lambda) = 10\, xy - 2{,}5\, x^2 - y^2 - \lambda(x + y - 9)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 0 \rightarrow 10\, y - 5\, x - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10\, y - 5\, x \\ F_y &= 0 \rightarrow 10\, x - 2\, x - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10\, x - 2\, y \end{aligned}\right\} x = 0{,}8\, y$$

Menurut kendala: $x + y = 9 \quad \rightarrow 0{,}8\, y + y = 9 \rightarrow y = 5$

$y = 5 \rightarrow x = 0{,}8(5) = 4 \rightarrow$ sehingga $f\,(x, y)_{maks} = 135$

$\lambda = 10(5) - 5(4) = 10(4) - 2(5) = 30.$

Karena $\lambda > 0$ berarti $x = 4$ dan $y = 5$, yang memaksimumkan *f(x,y)* terhadap kendala yang (dianggap) berbentuk persamaan, berlaku juga terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan.

(2) Dengan metode kondisi Kuhn-Tucker langsung dimana $g(x,y) = x + y - 9 \leq 0$:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \rightarrow 10\,y - 5\,x - \lambda = 0$

(b) $\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow 10\,x - 2\,y - \lambda = 0$

(c) $\lambda\, g = 0 \rightarrow \lambda(x + y - 9) = 0$ dimana $g = x + y - 9 \leq 0$

Jika $\lambda = 0$, maka $x = y = 0$ agar persamaan (a) dan (b) terpenuhi, dan kendala $x + y \leq 9$ juga dapat terpenuhi; dalam hal ini $f(0,0) = 0$.

Jika $x + y - 9 = 0$, maka $x = 9 - y$, sehingga:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } 10\,y - 5x - \lambda = 0 \rightarrow 10\,y - 45 + 5\,y - \lambda = 0 \\ \text{(b) } 10\,y - 2x - \lambda = 0 \rightarrow 90\; - 10\,y - 2\,y - \lambda = 0 \end{array}\right\} y = 5\; dan\; \lambda = 30$$

Dengan memasukkan $y = 5$ dan $\lambda = 30$ ke dalam (a) dan (b), diperoleh $x = 4$. Untuk $x = 4$ dan $y = 5$, $f(x,y) = 10(4)(5) - 2{,}5(4)^2 - (5)^2 = 135$. Jadi, sesuai dengan penyelesaian melalui metoda Lagrange sebelumnya, $x$ dan $y$ yang memaksimumkan $f(x,y)$, terhadap kendala pertidaksamaan $x + y \leq 9$ adalah $x = 4$ dan $y = 5$.

[Dalam pengujian $\lambda = 0$ sebelumnya kita juga menemukan bahwa $f(x,y)$ maksimum pada $x = y = 0$. Namun karena $f(4,5)$ lah yang dipilih].

*Contoh:*

Jika kita hendak meminimumkan suatu fungsi biaya:

$$C = x_1 - 4^2 + x_2 - 4^2$$

$$s.t{:}\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$-3x_1 - 2x_2 \geq -12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Fungsi Lagrange:

$$Z' = [x_1 - 4^2 + x_2 - 4^2] + \lambda_1[6 - 2x_1 + 3x_2] + \lambda_2[-12 - 3x_1 - 2x_2]$$

FONC:

$$\frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 0\ ;\ x_1 \geq 0\ ;\ x_1 \frac{\partial Z'}{\partial x_1} = 0$$

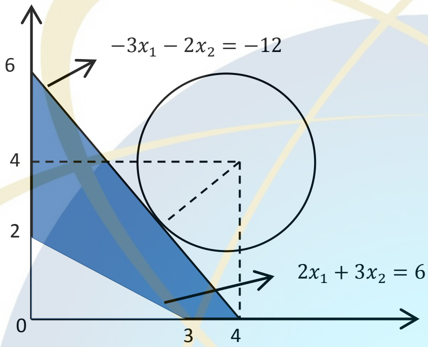
$$\frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ x_2 \frac{\partial Z'}{\partial 2} = 0$$

$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \qquad ; \lambda_1 \geq 0\,; \; \lambda_1 \frac{\partial Z'}{\partial \lambda_1} = 0$

$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} = -12 + 3x_1 + 2x_2 \leq 0 \qquad ; \lambda_2 \geq 0\,; \; \lambda_2 \frac{\partial Z'}{\partial \lambda_2} = 0$

Mencari solusi dengan coba-coba, karena ada 2 variabel dan 2 kendala, maka jumlah kombinasi penyelesaian yang mungkin adalah: $2^{2+2}$ = 16 kemungkinan.

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 0;\; x_2 = 0 \\ x_1 = 0;\; x_2 > 0 \\ x_1 > 0;\; x_2 = 0 \\ x_1 > 0;\; x_2 > 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \lambda_1 = 0;\; \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0;\; \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 > 0;\; \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 > 0;\; \lambda_2 > 0 \end{matrix}$$




Berdasarkan solusi grafik di atas dapat diketahui bahwa solusi yang mungkin hanya $x_1$ > 0 dan $x_2$ > 0, sehingga ada 4 solusi yang mungkin yaitu

$$x_1 > 0;\; x_2 > 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0;\; \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0;\; \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 > 0;\; \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 > 0;\; \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

- Misalkan solusi yang mungkin adalah: $x_1 > 0;\; x_2 > 0;\; \lambda_1 = 0;\; \lambda_2 = 0$

  Karena $x_1 > 0$ dan $x_1 \frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 0$, maka

  $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ .................(1)

  Karena $x_2 > 0$ dan $x_2 \frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 0$, maka

  $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ ..................(2)

Karena $\lambda_1 = 0;\; \lambda_2 = 0$, maka dari persamaan (1) dan (2) diperoleh solusi $x_1* = 4$ dan $x_2* = 4$. Dengan demikian solusinya menjadi $x_1* = 4$; $x_2* = 4$; $\lambda_1$*=0; $\lambda_2$*=0. Selanjutnya akan diperiksa apakah solusi ini memenuhi kondisi Kuhn Tucker (KKT) atau tidak.

Karena $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_1 \frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 0$, maka

$\frac{\partial Z'}{\partial \lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 < 0$ ..................(3)

Subtitusi $x_1* = 4$ dan $x_2* = 4$ ke persamaan (3), terbukti $\frac{\partial Z'}{\partial \lambda_1} < 0$

Karena $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_2 \frac{\partial Z'}{\partial \lambda_2} = 0$, maka

$\frac{\partial Z'}{\partial \lambda_2} = -12 + 3x_1 + 2x_2 < 0$ ..................(4)

Subtitusi $x_1* = 4$ dan $x_2* = 4$ ke persamaan (3), ternyata $\frac{\partial Z'}{\partial \lambda_2} > 0$. Jadi, solusi $x_1* = 4$; $x_2* = 4$; $\lambda_1*=0$; $\lambda_2*=0$ bukan solusi optimal yang memenuhi kondisi Kuhn-Tucker (KKT).

- Misalkan solusi yang mungkin adalah: $x_1 > 0;\ x_2 > 0;\ \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 > 0$

  Karena $x_1 > 0$ dan $x_1 \frac{\partial Z'}{\partial x_1} = 0,$ maka

  $\frac{\partial Z'}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ .................(1)

  Karena $x_2 > 0$ dan $x_2 \frac{\partial Z'}{\partial x_2} = 0,$ maka

  $\frac{\partial Z'}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ ..................(2)

Karena $\lambda_1 = 0$, maka persamaan (1) dan (2) menjadi:

$2x_1 - 4 + 3\lambda_2 = 0$ ..................(3)

$2x_2 - 4 + 2\lambda_2 = 0$ ..................(4)

Eliminasi persamaan (3) dan (4) menghasilkan

$4x_1 - 6x_2 + 8 = 0$ ..................(5)

Karena $\lambda_2$ dan $\lambda_2 \frac{\partial Z'}{\partial \lambda_2} = 0$, maka

$\frac{\partial Z'}{\partial \lambda_2} = -12 + 3x_1 + 2x_2 = 0$ ..................(6)

Kemudian eliminasi persamaan (5) dan (6) menghasilkan:

$13x_1 - 28 = 0 \rightarrow x_1* = \frac{28}{13}$

Subtitusi nilai $x_1* = \frac{28}{13}$ ke persamaan (5) sehingga diperoleh nilai $x_2 *= \frac{36}{13}$.

Subtitusi nilai $x_1* = \frac{28}{13}$ ke persamaan (3) sehingga diperoleh nilai $\lambda_2 *= \frac{16}{13}$.

Maka solusinya menjadi: $x_1* = \frac{28}{13}$; $x_2 *= \frac{36}{13}$; $\lambda_1 *= 0;\ \lambda_2 *= \frac{16}{13}$

Selanjutnya akan diperiksa apakah solusi ini memenuhi kondisi Kuhn-Tucker ataukah tidak.

Subtitusi $x_1* = \frac{28}{13}, \lambda_1 *= 0\ dan\ \lambda_2 *= \frac{16}{13}$ ke persamaan (2), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 0$

Subtitusi $x_2 *= \frac{36}{13}; \lambda_1 *= 0\ dan\ \lambda_2 *= \frac{16}{13}$ ke persamaan (2), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 0$

Karena $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_1 \frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 0$, maka

$$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 < 0 \qquad \text{..............(7)}$$

Subtitusi $x_1* = \frac{28}{13}$ dan $x_2 *= \frac{36}{13}$ ke persamaan (7), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} < 0$

Subtitusi $x_1* = \frac{28}{13}$ dan $x_2 *= \frac{36}{13}$ ke persamaan (6), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} = 0$

Jadi, solusi $x_1* = \frac{28}{13}; x_2 *= \frac{36}{13}; \lambda_1 *= 0; \lambda_2 *= \frac{16}{13}$ merupakan solusi optimal yang memenuhi kondisi Kuhn-Tucker.

## G. Penerapan Ekonomi

Pendekatan diferensiasi parsial sangat bermafaat untuk diterapkan pada model-model ekonomi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas, dalam hal kita hendak menelaah secara parsial pengaruh dari salah satu variabel bebas tadi terhadap variabel terikatnya.

### a. Pemintaan Marjinal dan Elastisitas Permintaan Parsial

Apabila terdapat hubungan antar dua macam barang dalam penggunaannya, maka dapat dikatakan permintaan dari masing-masing barang akan fungsional terhadap harga dari kedua macam barang tersebut (Dumairy, 2007). Atau dengan kata lain jika barang *A* dan barang *B* mempunyai hubungan penggunaan, maka:

$Q_{da} = f(P_a, P_b)$ dan $Q_{db} = f(P_a, P_b)$

Derivatif pertama dari $Q_{da}$ dan $Q_{dh}$ adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, di mana:

$\frac{\partial\ Q_{da}}{\partial\ P_a}$ adalah permintaan marjinal akan *A* berkenaan dengan $P_a$

$\frac{\partial\ Q_{da}}{\partial\ P_b}$ adalah permintaan marjinal akan *A* berkenaan dengan $P_b$

$\frac{\partial\ Q_{da}}{\partial\ P_b}$ adalah permintaan marjinal akan *B* berkenaan dengan $P_a$

$\frac{\partial\ Q_{db}}{\partial\ P_b}$ adalah permintaan marjinal akan *B* berkenaan dengan $P_b$

Dengan dapat diturunkannya fungsi permintaan marjinal tersebut, dapatlah dihitung elastisitas permintaan parsialnya. Dalam hal ini terdapat dua macam elastisitas permintaan, yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang itu sendiri (*elastisitas harga-permintaan*).

$$\eta_{da} = \frac{\%\,\Delta\,Q_{da}}{\%\,\Delta\,P_a} = \frac{E\,Q_{da}}{E\,P_a} = \frac{\partial\,Q_{da}}{\partial\,P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}}$$

$$\eta_{db} = \frac{\%\,\Delta\,Q_{db}}{\%\,\Delta\,P_b} = \frac{E\,Q_{db}}{E\,P_b} = \frac{\partial\,Q_{db}}{\partial\,P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

$\eta_{da}$ dan $\eta_{db}$ keduanya merupakan elastisitas harga-permintaan, yaitu berapa besar perubahan dari kuantitas barang yang diminta jika terjadi perubahan harga barang itu sendiri.

Serta dapat pula diukur elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang lain (*elastisitas silang-permintaan*).

$$\eta_{ab} = \frac{\%\,\Delta\,Q_{da}}{\%\,\Delta\,P_b} = \frac{E\,Q_{da}}{E\,P_b} = \frac{\partial\,Q_{da}}{\partial\,P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

$$\eta_{ba} = \frac{\%\,\Delta\,Q_{db}}{\%\,\Delta\,P_a} = \frac{E\,Q_{db}}{E\,P_a} = \frac{\partial\,Q_{db}}{\partial\,P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}}$$

$\eta_{ab}$ dan $\eta_{ba}$ keduanya adalah elastisitas silang permintaan. Jika $\eta_{ab}$ maupun $\eta_{ba}$ keduanya negatif ($\eta_{ab} < 0\ dan\ \eta_{ba} < 0$) untuk $P_a$ dan $P_b$ tertentu, berarti hubungan antara barang *A* dan barang *B* adalah komplementer atau saling melengkapi; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas keduanya. Misalkan hubungan antara BBM bersubsidi dengan harga mobil. Jika terjadi kenaikan harga BBM bersubsisi akan cenderung memicu penurunan jumlah permintaan atas mobil, karena sifat hubungan yang saling melengkapi

Sedangkan jika $\eta_{ab}$ maupun $\eta_{ba}$ keduanya positif ($\eta_{ab} > 0\ dan\ \eta_{ba} > 0$) untuk $P_a$ dan $P_b$ tertentu, berarti hubungan antara barang *A* dan barang *B* adalah kompetitif/substitutif atau saling menggantikan; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan penurunan permintaan atas barang lainnya. Misalkan: untuk sarapan kita dihadapkan pada dua jenis barang yaitu bubur ayam dan lontong sayur, jika salah satu harga anggaplah bubur ayam naik seribu rupiah dan lontong sayur harganya tetap, maka saat ini seakan-akan bubur ayam akan menjadi lebih mahal, sehingga orang akan menurunkan permintaan atas bubur ayam dan menambah konsumsi lontong sayur.

**b. Perusahaan dengan Dua Macam Produk dan Biaya Produksi Gabungan**

Suatu perusahaan dalam realitanya seringkali tidak hanya menghasilkan satu macam output, melainkan dua atau mungkin lebih macam output yang dihasilkan. Biaya yang dihasilkan untuk menghasilkan dua atau lebih macam output tersebut merupakan biaya produksi gabungan, maka untuk menghitung keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari perusahaan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan diferensiasi parsial (Dumairy, 2007).

Untuk penyederhanaan, misalkan suatu perusahaan memproduksi dua macam barang, *A* dan *B*, di mana fungsi permintaan akan masing-masing barang dicerminkan oleh $Q_a$ dan $Q_b$, serta biaya produksinya $C = f(Q_a, Q_b)$, maka

Penerimaan dari memproduksi *A* : $R_a = Q_a . P_a = f(Q_a)$

Penerimaan dari memproduksi *B* : $R_b = Q_b . P_b = f(Q_b)$

Penerimaan total: $R = R_a + R_b = f(Q_a) + f(Q_b)$

Dengan total $C = f(Q_a,\ Q_b)$ fungsi keuntungannya:

$\pi = R - C = f(Q_a) + f(Q_b) - f(Q_a, Q_b) = g(Q_a, Q_b)$

$\pi$ maksimum bila $\pi' = 0$

(1) $\pi_{Q_a} = \frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0$

(2) $\pi_{Q_b} = \frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0$

Dari (1) dan (2) nilai $Q_a$ dan nilai $Q_b$ dapat diperoleh. Selanjutnya nilai $\pi$ maksimum bisa dihitung.

Contoh:

Jika fungsi biaya total yang harus dikeluarkan oleh suatu perusahaan dalam memproduksi barang A dan B ialah $C = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a Q_b$. Kemudian harga jual dari masing-masing barang per unit adalah $P_a = 7$, dan $P_b = 20$. Hitunglah berapa banyak barang yang harus diproduksi dari masing-masing barang tersebut agar diperoleh keuntungan yang maksimum, dan berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut.

$TR_a = Q_a . P_a = 7Q_a$

$TR_b = Q_b . P_b = 20Q_b$

$TR = TR_a + TR_b$

$TR = 7Q_a + 20Q_b$

$TC = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_aQ_b$

$\pi = TR - TC = 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_aQ_b$

Kondisi profit maksimum ialah pada saat, $\pi' = 0$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 7 - 2Q_a - Q_b = 0$ ........................................(1)

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 20 - 6Q_b - Q_a = 0$ ........................................(2)

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa lakukan eliminasi

$2Q_a + Q_b = 7$ x1 $2Q_a + Q_b = 7$

$Q_a + 6Q_b = 20$ x2 $\underline{2Q_a + 12Q_b = 40}$

$11Q_b = 33$

$Q_b = 3$

Hasil tersebut dimasukkan ke dalam persamaan (1) atau (2)

$2Q_a + Q_b = 7$

$2Q_a = 7 - 3$

$Q_a = 2$

$\pi = 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_aQ_b$

$\pi = 7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2)(3) = 37$

Sehingga agar suatu perusahaan dapat memperoleh keuntungan yang maksimum, maka perusahaan harus memproduksi sebanyak 2 unit barang *A* dan 3 unit barang *B*, dengan keuntungan yang didapat ialah sebesar 37.

Selain cara di atas, dapat pula diselesaikan melalui nilai dari marjinalnya, yaitu dengan menghitung penerimaan marjinal dari masing-masing barang disamakan dengan biaya marjinal dari barang yang bersangkutan. Atau dengan kata lain kondisi keuntungan maksimum ialah pada saat *MR* = *MC*.

**c. Utilitas Marjinal Parsial**

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sebagai konsumen mengonsumsi berbagai macam barang, tidak hanya satu barang. Jika utilitas dari konsumen dilambangkan dengan *U* dan barang yang dikonsumsinya dilambangkan dengan $q_i$ ($i$ = 2,…., $n$), maka fungsi utilitas dapat dituliskan dengan notasi $U = f(q_1, q_2, q_3, \ldots q_n)$.

Seandainya untuk penyederhanaan dianggap bahwa seorang konsumen hanya mengkonsumsi dua macam barang, katakanlah *X* dan *Y*, maka fungsi utilitasnya adalah:

$U = f(x,y)$

Derivatif pertama dari $U$ merupakan utilitas marjinal parsialnya.

$\frac{\partial U}{\partial x}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang $X$.

$\frac{\partial U}{\partial y}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang $Y$.

Untuk $U$ = konstanta tertentu, fungsi utilitas $U = f(x,y)$ merupakan suatu persamaan kurva indiferensi (*indefference curve*), yaitu kurva menunjukkan berbagai kombinasi konsumsi barang $X$ dan $Y$ yang memberikan tingkat kepuasan yang sama.

Keseimbangan Konsumsi. Keseimbangan konsumsi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat kombinasi konsumsi beberapa macam barang yang memberikan kepuasan optimum. Secara geometri, keseimbangan konsumsi terjadi pada persinggungan kurva indiferensi dengan garis anggaran konsumen (*budget line*). Garis anggaran adalah garis yang mencerminkan kemampuan konsumen membeli berbagai macam barang berkenaan dengan harganya masing-masing dan pendapatan konsumen. Jika pendapatan konsumen berjumlah $M$ serta harga barang $X$ dan barang $Y$ masing-masing $P_x$ dan $P_y$ per unit, persamaan *budget line*-nya dapat dituliskan dengan notasi $M = x.P_x + y.P_y$.

Tingkat kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum atau keseimbangan konsumsi dapat dicari dengan Metoda Lagrange. Dalam hal ini, fungsi utilitas $U = f(x,y)$ dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M = x.P_x + y.P_y$. analog dengan penyelesaian keseimbangan produksi sebagaimana diuraikan pada seksi sesudah ini, diperoleh fungsi baru Lagrange:

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda(x.P_x + y.P_y - M)$$

Agar $F$ maksimum:

$$F_x(x,y) = 0 \rightarrow f_x(x,y) + \lambda P_x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$F_y(x,y) = 0 \rightarrow f_y(x,y) + \lambda P_y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Selanjutnya perhatikan:

Utilitas total : $U = f(x,y)$

Utilitas marjinal : $MU = U' = f'(x,y)$

(i) Utilitas marjinal barang $X$ : $MU_x = f_x(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$

(ii) Utilitas marjinal barang $Y$ : $MU_y = f_y(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$

Dari (1) dan (2),

$$\frac{f_x\,(x,\ y)}{P_x} = \frac{f_y\,(x,\ y)}{P_y}$$

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$$

Jadi dalam rumusan lain dapat pula dinyatakan, bahwa keseimbangan konsumsi akan tercapai apabila hasil bagi utilitas marjinal masing-masing barang terhadap harganya bernilai sama.

Contoh:

Misalkan kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang $X$ dan $Y$ dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2\ y^3$. Jumlah pendapatan konsumen 1000 rupiah, harga $X$ dan harga $Y$ per unit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah.

a) Bentuklah fungsi utilitas marjinal untuk masing-masing.
b) Berapa utilitas marjinal tersebut jika konsumen mengkonsumsi 14 unit $X$ dan 13 unit $Y$ ? Jelaskan apakah dengan mengkonsumsi 14 unit $X$ dan 13 unit $Y$ kepuasan konsumen optimum ataukah tidak.

a) $U = x^2y^3$

$$MU_X = U_x = \frac{\partial\,U}{\partial\,x} = 2\,xy^3$$

$$MU_Y = U_y = \frac{\partial\,U}{\partial\,y} = 2\,x^2y^3$$

b) Jika $x = 14$ dan $y = 13$,

$$MU_X = 2(14)(13)^3 = 61.516$$

$$MU_Y = 2(14)^2(13)^2 = 99.372$$

$$\frac{MU_X}{P_x} = \frac{61.516}{25} = 2.460.64$$

$$\frac{MU_Y}{P_y} = \frac{99.372}{50} = 1.987.44$$

Pada kondisi ini, $\frac{MP_X}{P_x} \neq \frac{MU_Y}{P_y}$

Berarti kombinasi konsumsi 14 unit $X$ dan 13 unit $Y$ tidak memberikan kepuasan optimum, tidak terjadi keseimbangan konsumsi. Keseimbangan konsumsi akan terjadi ketika pada kondisi $\frac{MP_X}{P_x} = \frac{MU_Y}{P_y}$. Karena pada kondisi ini tambahan mengonsumsi marjinal dari barang $X$ akan sama dengan tambahan mengonsumsi marjinal atas barang $Y$.

**d. Optimum Utilitas**

Dalam teori perilaku konsumen kita mendapatkan suatu perilaku yang memaksimumkan utilitas dengan suatu kendala anggaran tertentu, ataupun sebaliknya. Fungsi utilitas pada perilaku konsumen berupaya untuk menjelaskan bagaimanakah pemilihan barang konsumsi yang dapat dilakukan konsumen terkait dengan upaya mencari tingkat utilitas yang optimal.

Terdapat dua solusi optimal pada teori perilaku konsumen, yaitu:

1. Memaksimumkan jumlah utilitas pada suatu kendala pendapatan tertentu

$\max_{X,Y}\ f(X,Y)$

s.t. $M = P_x X + P_y Y$

dimana:

f (X, Y) merupakan fungsi utilitas barang konsumsi

X adalah barang konsumsi X

Y adalah barang konsumsi Y

M adalah pendapatan konsumen

$P_x$ adalah harga barang X

$P_y$ adalah harga barang Y

*Contoh:*

Misalkan: diketahui fungsi utilitas seorang konsumen ialah $U = X^{0.5}Y^{0.5}$, dengan fungsi kendala pendapatan adalah:$M = P_x X + P_y Y$.

Hitunglah berapa jumlah barang konsumsi X dan Y yang dipilih oleh konsumen untuk memaksimumkan tingkat utilitas?

Jawab:

$$\max_{X,Y}\ U = X^{0.5}Y^{0.5}$$
$$s.t.\ M = P_X X + P_Y Y$$

Bentuk fungsi Lagrange dari fungsi maksimisasi di atas:

$$\mathcal{L} = X^{0.5}Y^{0.5} + \lambda\,(M - P_X X - P_Y Y)$$

Lakukan turunan pertama:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0.5X^{-0.5}Y^{0.5} - \lambda P_X = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = 0.5Y^{-0.5}X^{0.5} - \lambda P_Y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = M - P_X X - P_Y Y = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa dapatkan

$$\frac{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}}{P_X} = \frac{0.5Y^{-0.5}X^{0.5}}{P_Y}$$

$$\frac{P_Y}{P_X} = \frac{0.5X^{0.5}Y^{-0.5}}{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}}$$

$$\frac{P_Y}{P_X} = \frac{X}{Y}$$

$$P_Y = \frac{P_X X}{Y} \; ; P_X = \frac{P_Y Y}{X} \qquad (4)$$

Persamaan (4) kita masukkan ke dalam fungsi kendala pendapatan

M = $P_X$ X + $P_Y$ Y

M = $\frac{P_Y Y}{X} X + P_Y Y$

$M = P_Y Y + P_Y Y$

M = 2 $P_Y Y$

$Y = \frac{M}{2P_Y}$

Untuk barang konsumsi X kita lakukan hal yang sama

M = $P_X$ X + $P_Y$ Y

M = $P_X X + \frac{P_X X}{Y} Y$

$M = P_X X + P_X X$

M = 2 $P_X X$

$X = \frac{M}{2P_X}$

Sehingga jumlah X dan Y yang memaksimalkan jumlah output adalah

$X = \frac{M}{2P_X}$ dan $Y = \frac{M}{2P_Y}$

2. Meminimumkan pendapatan pada suatu jumlah utilitas tertentu

   $\min_{X,Y} \; f(M)$

   s.t. U = f (X, Y)

   dimana:

   f (M) merupakan pendapatan

   X adalah barang konsumsi X

   Y adalah barang konsumsi Y

   $P_X$ adalah harga barang X

   $P_Y$ adalah harga barang Y

Misalkan: diketahui fungsi pendapatan adalah M = $P_x$ X + $P_y$ Y dengan fungsi utilitas $U = X^{0.5}Y^{0.5}$.

Hitunglah berapa jumlah barang konsumsi X dan Y yang dibutuhkan untuk meminimumkan pendapatan pada suatu jumlah kombinasi barang konsumsi X dan Y tertentu?

Jawab:

$$\min_{X,Y} M = P_X\, X + P_Y\, Y$$
$$s.t.\ U = X^{0.5}Y^{0.5}$$

Bentuk fungsi Lagrange dari fungsi maksimisasi di atas:

$$\mathcal{L} = P_X\, X + P_Y\, Y + \lambda\,(U - X^{0.5}Y^{0.5})$$

Lakukan turunan pertama:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = P_X - 0.5\lambda X^{-0.5}Y^{0.5} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = P_Y - 0.5\lambda X^{0.5}Y^{-0.5} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = U - X^{0.5}Y^{0.5} = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa dapatkan

$$\frac{P_X}{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}} = \frac{P_Y}{0.5X^{0.5}Y^{-0.5}}$$

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}}{0.5X^{0.5}Y^{-0.5}}$$

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{P_Y Y}{P_X}\ ; Y = \frac{P_X X}{P_Y} \qquad (4)$$

Persamaan (4) kita masukkan ke dalam fungsi utilitas

$$U = X^{0.5}Y^{0.5}$$

$$U = \left(\frac{P_Y Y}{P_X}\right)^{0.5} Y^{0.5}$$

$$U = \left(\frac{P_Y}{P_X}\right)^{0.5} Y$$

$$Y = U\left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^{0.5}$$

Untuk barang konsumsi X kita lakukan hal yang sama

$$U = X^{0.5}Y^{0.5}$$

$$U = \left(\frac{P_X X}{P_Y}\right)^{0.5} X^{0.5}$$

$$U = \left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^{0.5} X$$

$$X = U\left(\frac{P_Y}{P_X}\right)^{0.5}$$

Sehingga jumlah barang konsumsi X dan Y yang akan meminimalkan pendapatan

$$X = U\left(\frac{P_Y}{P_X}\right)^{0.5} \qquad \text{dan} \qquad Y = U\left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^{0.5}$$

*Contoh*

Misalkan kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang *X* dan *Y* dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2 y^3$. Jumlah pendapatan konsumen 1000 rupiah, harga *X* dan harga *Y* per unit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah, kita akan mencoba menghitung berapa kombinasi konsumsi *X* dan *Y* yang memberikan kepuasan optimum, serta besarnya nilai kepuasan optimum. Buktikan pula bahwa pada tingkat kepuasan optimum tersebut $MU_X / P_x = MU_Y / P_y$.

$$\left.\begin{array}{l} U = x^2\, y^3 \\ 25\,x + 50\,y - 1.000 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} F(x,y) = x^2y^3 + \lambda(25 + 50\,y - 1.000) \\ \qquad\quad = x^2y^3 + 25\,\lambda x + 50\,\lambda y - 1.000\,\lambda \end{array}$$

Agar *F* maksimum:

$$F_x = 2xy^3 + 25\,\lambda = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{2\,xy^3}{25} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

$$F_y = 3x^2y^2 + 50\,\lambda = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{2\,x^2y^3}{25} \ldots.\ldots\ldots..\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

Berdasarkan (1) dan (2),

$$\frac{2xy^3}{25} = \frac{3y^2y^2}{50} \rightarrow 100\,xy^3 = 75\,x^2\,y^2, y = \frac{3}{4}x$$

$$25\,x + 50\,y - 1.000 = 0$$

$$25\,x + 50\left(\frac{3}{4}x\right) = 1.000 \rightarrow x = 16$$

$$y = \frac{3}{4}; \qquad x = 2$$

$$U = x^2y^3 = (16)^2\,(12)^3 = 442.368\,.$$

Kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum adalah 16 unit *X* dan 12 unit *Y*, dengan nilai kepuasan *U* = 442.368.

Untuk *x* = 16 dan *y* = 12,

$$MU_X = 2xy^3 = 2(16)(12)^3 = 55.296$$

$$MU_Y = 3\,x^2\,y^2 = 3(16)^2(12)^{12} = 110.592$$

$$MU_X / P_x = 55.296/25 = 2.211{,}84$$

$MU_Y/P_y = 110.592/50 = 2.211{,}84$ terbukti.

$$\frac{MU_X}{P_x} = \frac{MU_Y}{P_y}$$

**e. Produk Marjinal Parsial**

Produksi ialah suatu proses mengolah faktor produksi (input) menjadi suatu keluaran (output). Faktor produksi antara lain berupa modal, tenaga kerja, tanah, bahan baku, sumber daya alam, teknologi, dan sebagainya. Jika jumlah keluaran yang dihasilkan dilambangkan dengan $P$ dan masukan yang digunakan dilambangkan dengan $x_i$ ($i$ = 1, 2…………., $n$) maka fungsi produksinya dapat dituliskan dengan notasi $P = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n)$.

Sebagian dari masukan yang digunakan sudah barang tentu merupakan masukan tetap, sementara sebagian lainnya adalah masukan variabel. Selanjutnya untuk penyederhanaan model diasumsikan hanya dalam suatu proses produksi hanya terdiri dari dua faktor produksi yaitu modal ($K$) dan tenaga kerja ($L$), maka fungsi produksinya secara pasti dapat dinyatakan dengan

$$P = f(K,L)$$

Derivatif pertama dari $P$ merupakan produk marjinal parsialnya.

$\frac{\partial P}{\partial k}$ adalah produk marjinal berkenan dengan masukan $K$

$\frac{\partial P}{\partial l}$ adalah produk marjinal berkenan dengan masukan $L$

Untuk $P$ = konstanta tertentu, fungsi produksi $P = f(k,l)$ merupakan suatu persamaan *isoquant*, yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi pengunaan masukan $K$ dan $L$ yang menghasilkan keluaran dalam jumlah sama.

Keseimbangan produksi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat penggunaan kombinasi faktor-faktor produksi secara optimum, yakni suatu tingkat pencapaian produksi dengan kombinasi biaya terendah (*least cost combination*). Secara geometri, keseimbangan produksi terjadi pada persinggungan *isocost* dengan *isoquant*. Pada titik persinggungan tersebutlah terjadi jumlah kombinasi optimal antara faktor produksi $K$ dan $L$ yang akan memaksimalkan jumlah output.

*Isocost* adalah kurva yang mencerminkan kemampuan produsen membeli berbagai macam masukan berkenaan dengan harga masing-masing masukan dan jumlah dana yang dimilikinya. Jika jumlah dana yang dianggarkan untuk membeli masukan $K$ dan masukan $L$ adalah sebesar $M$, serta harga masukan $K$ dan masukan $L$ masing-masing $P_k$ dan $P_l$, persamaan *isocost*-nya dapat dituliskan dengan notasi $M = K.P_k + L.P_l$.

Tingkat kombinasi penggunaan masukan yang optimum atau "*least cost combination*" dapat dicari dengan metoda Lagrange.

Dalam hal ini fungsi produksi $P = f(K, L)$ dimaksimumkan terhadap fungsi *isocost* $M = K.P_k + L.P_l$.

Fungsi tujuan yang hendak dioptimumkan : $P = f(K, L)$

Fungsi kendala yang dihadapai : $M = K.P_K + L.P_L$

$K.P_K + L.P_L - M = 0$

fungsi baru Lagrange : $F(K, L) = f(K,L) + \lambda(K.P_K + L.P_L - M)$

syarat yang diperlukan agar $F(K, L)$ maksimum:

$$F_k(K,L) = 0 \rightarrow f_K(K,L) + \lambda P_K = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$F_l(K,L) = 0 \rightarrow f_L(K,L) + \lambda P_L = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) nilai $k$ dan nilai $l$ dapat diperoleh.

Selanjutnya nilai $p$ maksimum bisa dihitung.

Produksi total : $P = f(K, L)$

(1) Produksi marjinal masukan $K$ : $MP_K = f_K(K,L) = \frac{\partial P}{\partial K}$

(2) Produksi marjinal masukan $L$ : $MP_L = f_L(K,L) = \frac{\partial P}{\partial L}$

Pengembangan lebih lanjut persamaan (1) dan (2) di atas tadi akan menghasilkan:

(1) $f_K\ (K,L) + \ \lambda P_k = 0 \rightarrow f_k(K,L) = -\lambda P_k,\ -\lambda = \frac{f_k(K,L)}{P_k}$

(2) $f_L\ (K,L) + \ \lambda P_L = 0 \rightarrow f_L(K,L) = -\lambda P_L,\ -\lambda = \frac{f_L(K,L)}{P_L}$

Dengan demikian, syarat keseimbangan produksi dapat juga dirumuskan:

$$\frac{f_k(K,L)}{P_k} = \frac{f_L(K,L)}{P_L}$$

$$\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l}$$

Jadi dalam rumusan lain dapat pula dinyatakan, bahwa produksi optimum dengan kombinasi biaya terendah akan tercapai apabila hasilbagi produk marjinal masing-masing masukan terhadap harganya bernilai sama.

Contoh:

Fungsi produksi suatu barang dinyatakan dengan $P = 6\ k^{2/3}/^{1/3}$. Bentuklah fungsi marjinal untuk masing-masing faktor produksi. Berapa produk marjinal tersebut jika digunakan 8 unit *K* dan 27 unit *L*?

$P = 6\ k^{2/3}/^{1/3}$

$MP_K = P_k = \frac{\partial\ P}{\partial\ k} = 4\ k^{-1/3}/^{1/3} = \frac{4/^{1/3}}{k^{1/3}}$

Jika *k* = 8 dan / = 27,

$MP_K = \frac{4(27)^{1/3}}{8^{1/3}} = \frac{4\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4(3)}{2} = 6$

$MP_L = \frac{2(8)^{2/3}}{27^{2/3}} = \frac{2\sqrt[2]{8^2}}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{2\ (4)}{9} = \frac{8}{9}$

Contoh:

Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk membeli masukan *K* dan masukan *L*. Harga per unit masukan *K* adalah 4 rupiah dan masukan *L* adalah 3 rupiah. Fungsi produksinya $P = 12\ kl$. Buktikan bahwa untuk mencari tingkat produksi optimum berlaku ketentuan $MP_K/P_k = MP_L/P_l$.

$P = 12\ kl \rightarrow MP_x = \frac{\partial\ P}{\partial\ k} = 12\ l\ dan\ MP_L = \frac{\partial\ P}{\partial\ l} = 12\ k$

Untuk $P_k = 4, P_l = 3, k = 12\ dan\ l = 16$:

$\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l} \rightarrow \frac{12\ l}{4} = \frac{12\ k}{3} \rightarrow \frac{12(16)}{4} = \frac{12(12)}{3}$ terbukti

**f. Optimum Produksi**

Apabila dalam teori perilaku konsumen kita mendapatkan suatu perilaku yang memaksimumkan utilitas dengan suatu kendala anggaran tertentu. Maka pada teori prilaku produsen kita juga mempunyai suatu perilaku yang memaksimumkan jumlah output dengan suatu kendala biaya tertentu. Fungsi produksi pada teori perilaku produsen dikenal dengan kurva isoquant, yaitu suatu kurva yang menggambarkan kombinasi faktor produksi (K (modal) dan L (tenaga kerja)) untuk menghasilkan suatu jumlah output tertentu. Kendala yang dihadapi oleh produsen adalah kendala biaya yang dikenal dengan kurva isocost. Titik optimal ialah pada kondisi persinggungan antara kurva isoquant dengan kurva isocost.

Terdapat dua solusi optimal sebagaimana pada teori perilaku konsumen, yaitu:

1. Memaksimumkan jumlah output pada suatu kendala biaya tertentu

   $\max_{K,L}\ f(K, L)$

s.t. C = wL + rK

dimana:

f (K, L) merupakan fungsi produksi output

L adalah tenaga kerja

K adalah modal

w adalah upah/gaji

r adalah tingkat bunga/sewa

Misalkan: diketahui fungsi produksi suatu barang ialah $Q = K^{0.5}L^{0.5}$, dengan fungsi kendala biaya adalah: C = wL + rK.

Hitunglah berapa jumlah faktor produksi K dan L yang dibutuhkan untuk memaksimumkan jumlah output?

Jawab:

$$\max_{K,L}\ Q = K^{0.5}L^{0.5}$$
$$s.t.\ C = wL + rK$$

Bentuk fungsi Lagrange dari fungsi maksimisasi di atas:

$$\mathcal{L} = K^{0.5}L^{0.5} + \lambda\,(C - wL - rK)$$

Lakukan turunan pertama:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0.5K^{-0.5}L^{0.5} - \lambda r = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0.5K^{0.5}L^{-0.5} - \lambda w = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C - wL - rK = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa dapatkan

$$\frac{0.5K^{-0.5}L^{0.5}}{r} = \frac{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}{w}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{K}{L}$$

$$w = \frac{rK}{L}\ ; r = \frac{wL}{K} \qquad (4)$$

Persamaan (4) kita masukkan ke dalam fungsi kendala biaya

C = wL + rK

C = $\frac{rK}{L}L + rK$

$C = rk + rK$

C = 2 rK

$K = \frac{C}{2r}$

Untuk jumlah tenaga kerja (L) kita lakukan hal yang sama

C = wL + rK

C = $wL + \frac{wL}{K}\ K$

$C = wl + wl$

C = 2 wl

$L = \frac{C}{2w}$

Sehingga jumlah K dan L yang memaksimalkan jumlah output adalah

$K = \frac{C}{2r}$ dan $L = \frac{C}{2w}$

2. Meminimumkan biaya pada suatu jumlah output tertentu

   $\min_{K,L}\ f(C)$

   s.t. Q = f (K, L)

   dimana:

   f (C) merupakan fungsi biaya

   L adalah tenaga kerja

   K adalah modal

   w adalah upah/gaji

   r adalah tingkat bunga/sewa

   Misalkan: diketahui fungsi biaya adalah C = wL + rK dengan kendala utilitas ialah $Q = K^{0.5}L^{0.5}$:

   Hitunglah berapa jumlah faktor produksi K dan L yang dibutuhkan untuk meminimumkan biaya pada suatu jumlah output tertentu?

   Jawab:

   $$\min_{K,L} C = wL + rK$$
   $$s.t.\ Q = K^{0.5}L^{0.5}$$

   Bentuk fungsi Lagrange dari fungsi maksimisasi di atas:

   $\mathcal{L} = wL + rK + \lambda\,(Q - K^{0.5}L^{0.5})$

   Lakukan turunan pertama:

   $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K} = r - 0.5\lambda K^{-0.5}L^{0.5} = 0$ (1)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - 0.5\lambda K^{0.5} L^{-0.5} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Q - K^{0.5} L^{0.5} = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa dapatkan

$$\frac{r}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}} = \frac{w}{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{K}{L}$$

$$K = \frac{wL}{r} \; ; L = \frac{rK}{w} \qquad (4)$$

Persamaan (4) kita masukkan ke dalam fungsi produksi

$$Q = K^{0.5} L^{0.5}$$

$$Q = \left(\frac{wL}{r}\right)^{0.5} L^{0.5}$$

$$Q = \left(\frac{w}{r}\right)^{0.5} L$$

$$L = Q \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}$$

Untuk jumlah modal (K) kita lakukan hal yang sama

$$Q = K^{0.5} L^{0.5}$$

$$Q = K^{0.5} \left(\frac{rK}{w}\right)^{0.5}$$

$$Q = K \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}$$

$$K = Q \left(\frac{w}{r}\right)^{0.5}$$

Sehingga jumlah K dan L yang meminimalkan biaya ialah

$$K = Q \left(\frac{w}{r}\right)^{0.5} \quad \text{dan} \quad L = Q \left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}$$

*Contoh*:

Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk membeli masukan *K* dan masukan *L*. Harga per unit masukan *K* adalah 4 rupiah dan masukan *L* adalah 3 rupiah. Fungsi produksinya *P* = 12 *KL*. Berapa unit masing-masing masukan seharusnya ia gunakan agar produksinya optimum, dan beberapa unit keluaran yang dihasilkannya dari kombinasi tersebut?

Fungsi produksi yang hendak dioptimumkan : $P = f(k,l) = 12\,kl$

Fungsi *isocost* yang menjadi kendala : $M = k.P_k + l.P_l$

$96 = 4\,k + 3\,l$

$96 - 4\,k - 3\,l = 0.$

Fungsi Lagrange:

$$F(k.l) = 12kl + \lambda(96 - 4\,k - 3\,l)$$
$$= 12kl + 96\lambda - 4\,\lambda k - 3\,\lambda l)$$

Agar $F$ maksimum, $F_k = 0$ dan $F_l = 0$

$$\left.\begin{aligned} F_k(k,l) &= 12\,l - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3\,l \\ F_l(k,l) &= 12\,k - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 4\,k \end{aligned}\right\} 3\,l = 4\,k$$

$96 = 4\,k + 3\,l$

$96 = 4\,k + 4\,k \rightarrow k = 12$

$l = 4/3\,(12) = 16$

$P = 12\,kl = 12(12)(16) = 2304.$

Jadi agar produksinya optimum seharusnya digunakan kombinasi 12 unit $K$ dan 16 unit $L$, denga hasil produksi 2304 unit.

**Latihan**

1. Jika diketahui: $R(Q) = 32Q - Q^2$

   $C(Q) = Q^2 + 8Q + 4$

   $\pi_0 = 18$

   Tentukan solusi dari optimisasi berikut yang memenuhi kondisi Kuhn Tucker:

   Max $R(Q)$

   s.t. $C - R \leq -\pi_0$

2. Jika diketahui fungsi produksi suatu barang ialah $Q = K^{0.2}L^{0.8}$, dengan fungsi kendala biaya adalah: C = wL + rK. (a) Hitunglah berapa jumlah faktor produksi K dan L yang dibutuhkan untuk memaksimumkan jumlah output? (b) Hitunglah berapa jumlah faktor produksi K dan L yang dibutuhkan untuk meminimumkan biaya pada suatu jumlah output tertentu?

3. Selesaikan optimisasi berikut dengan menggunakan Kuhn-Tucker dalam upaya memaksimumkan kepuasan terhadap jumlah waktu yang telah ditetapkan:

   Max $U(k, d) = kd^2 - 10k$

   s.t. $2k + 8d \leq 116$

4. Buktikan bahwa fungsi produksi *Cobb-Douglas* $P = 6K^{2/3}L^{1/3}$ adalah fungsi homogen berderajat satu (homogen linier)?

# BAB 10
# INTEGRAL

## A. Pengertian Integral

Jika sebelumnya kita telah membahas diferensial sebagai proses limit yang pertama, maka pada bab ini kita membahas topik selanjutnya yaitu integral. Dalam istilah ilmu ukur (geometris) integral membahas luas (area) di bawah suatu kurva. Pembahasan mengenai integral ini akan mencakup pengertian integral dan cara mengintegralkan suatu fungsi (Asauri, 2009).

Integral dapat didefinisikan sebagai perhitungan kebalikan dari diferensial suatu fungsi (suatu fungsi asal yang diturunkan dapat dikembalikan ke fungsi asalnya dengan cara integral) (Supangat, 2006). Dengan mempelajari integral kita dapat mencari fungsi asal dari suatu fungsi yang kita ketahui. Misalkan untuk di ekonomi dengan menggunakan integral kita bisa mencari fungsi biaya total dari fungsi biaya marjinal yang kita miliki.

Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa integral berhubungan dengan luas di bawah kurva suatu fungsi. Hal ini dapat dibantu pembahasannya secara ilmu ukur (geometris). Akan tetapi, secara analitis, integral dan diferensial tidak tergantung pada ilmu ukur. Suatu penafsiran geometris hanya dipergunakan untuk membantu memudahkan pembahasan atau penganalisasian.

Integral merupakan kebalikan dari diferensial (antiderivatif). Bila suatu fungsi $y = f(x)$ mempunyai suatu turunan (derivatif) adalah $f(x) = F(x)$ untuk setiap nilai x dalam interval $a \leq x \leq b$, dan bila dx adalah

Derivatifnya $\frac{dy}{dx} = f(x)$, dan

Diferensialnya $dy = f(x)\,dx$

Kedua derivatif dan diferensial ini adalah sama, dimana $f(x)$ adalah fungsi yang kontinu dari x dalam batas-batas $a \leq x \leq b$ dimana fungsi $y = f(x)$ dan turunan (derivatif)-nya $f'(x) = f(x)$.

Proses untuk memperoleh fungsinya kembali atau fungsi asalnya adalah dengan kebalikan dari diferensialnya. Proses inilah yang dikenal dengan istilah *integral*. Tanda untuk integral (*integral sign*) adalah $\int$. Sehingga dari penjelasan di atas kita dapat menarik suatu benang merah bahwa integral adalah sebagai antiderivatif (*integral of differential*). Jika diferensialnya adalah: *dy = f (x) dx*, integralnya adalah: $y = \int f\ (x)\ dx$.

Meskipun integral adalah kebalikan dari diferensial, perlu diingat bahwa tidak semua fungsi dapat diintegralkan. Selain itu perlu pula diperhatikan bahwa teknik integral dapat lebih sulit dibandingkan dengan teknik diferensial.

Dalam perhitungan diferensial, bahwa setiap derivatif dari suatu fungsi konstan, nilainya adalah 0 (nol), maka dalam perhitungan integral ini sebagai hasil perhitungannya selalu ditambahkan dengan konstanta (c), sehingga hasil perhitungan integral di atas menjadi: $\int f'(x)dx = f(x) + c$. Oleh karena itu, tambahan suatu nilai konstan yang sembarang untuk suatu fungsi *f(x)* akan mempunyai integral $\int F\ (x)\ dx$. Jadi, jika $f\ \ (x)$ adalah suatu fungsi yang lain dan c adalah nilai konstan yang sembarang, integral kedua fungsi tersebut yaitu *f(x)* dan *f (x) + c* adalah sama, yaitu: *F (x)*.

Atau dengan kata lain, dapatlah disebutkan bahwa bila *f (x)* dan *g (x)* adalah dua fungsi yang kontinu. Turunan atau diferensial kedua fungsi tersebut adalah sama yaitu *F(x)*, maka selisih antara kedua fungsi tersebut yaitu *f(x) – g(x)* adalah konstanta (= c).

Selanjutnya, untuk hitung integral ini diberikan notasi $\int$ (dibaca: integral). Dengan bentuk umum hasil kebalikan dari diferensialnya, sebagai berikut:

Suatu fungsi y = f(x), yang differensur menjadi $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

$$atau\ dy = f(x)'dx.$$

Jika hasil dari diferensiasi dinyatakan oleh $f'(x)$, maka integral dari fungsi tersebut dinyatakan oleh:

$$y = \int f'(x)dx = f(x) + c$$

**Rieman Integral**

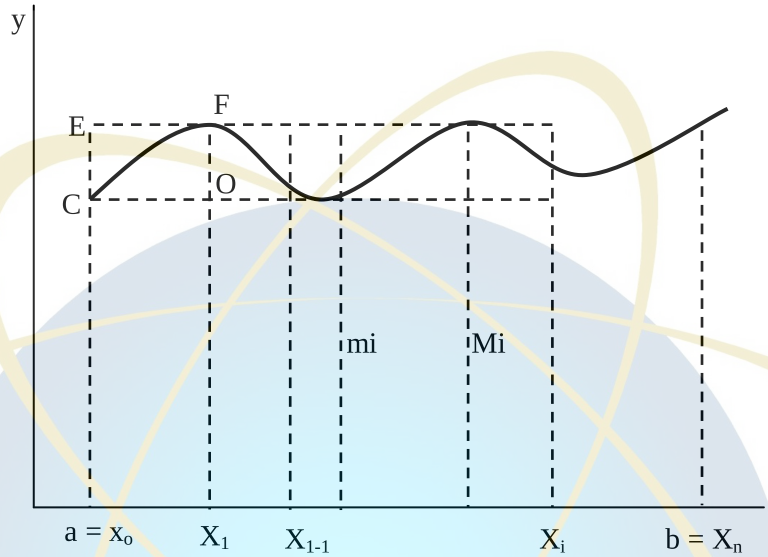
Misalkan suatu fungsi yang kontinu Y = f (x) mempunyai grafik seperti terlihat pada Gambar 10.1. dibawah ini. Daerah kurva fungsi ini dibatasi oleh interval [a, b] yang dapat dianggap sebagai rangkaian titik-titik.

Dalam hal ini kita mengangap nilai dari fungsi y = f(x) tertentu (*finite*). Selanjutnya, kita bermaksud menghitung luas (area) di bawah kurva y = f(x) di antara a dan b. Untuk ini misalkan kita membagi interval [a, b] ke dalam jarak bagian (*sub internal*) yang sama. Maka, himpunannya adalah:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{n-1} < x_n = b$$

Apabila kita lihat pada jalur di antara $x_0$ dan $x_1$, akan diperoleh suatu pendekatan atas luas (area) di bawah kurva dengan salah satu empat persegi panjang:

$$R_1 = x_0\, CD\, x_1 \text{ atau } R_1' = x_0\, EF\, x_1$$




*Gambar 10.1. Grafik fungsi y = f(x)*

Sedangkan $R_1$ dan $R_1$ dapat dihitung dengan:

$$R_1 = (x_1 - x_0) f(x_0)$$

$$R_1' = (x_1 - x_0) f(x_1)$$

Misalkan luas (area) di bawah kurva adalah $R_1$' maka kita dapat melihat dari Gambar 1. Di atas, bahwa:

$$R_1 < R_1" < R_1'$$

Keadaan seperti ini diperoleh karena $x_o$ dan $x_1$ dipilih, sehingga $f(x_o)$ akan lebih kecil dan $f(x_1)$ akan lebih besar dari nilai $f(x)$ dalam $(x_o, x_1)$.

Pada umumnya, jika kita mengambil suatu interval $(x_{i-1}\ ;\ x_i)$ seperti dapat dilihat pada Gambar 10.1. Dari seluruh nilai $f(x)$ dalam interval tersebut, akan mempunyai batas atas $M_i$ dan batas bawah $m_i$ seperti terlihat pada gambar. Selanjutnya, $M_i\,(x_i - x_{i-1})$ akan memberikan batas dari luar (area) ini, dan $m_i\,(x_i - x_{i-1})$ memberikan batas bawahnya.

Sekarang marilah kita lakukan hal seperti ini untuk seluruh interval yang ada. Pertama terhadap $m_i$ dan kedua terhadap $M_i$. Maka, diperoleh:

$$z = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

Apabila dinyatakan: $(x_i - x_{i-1})\Delta x_i$, dapat kita sederhanakan perhitungan di atas menjadi:

$$z = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Demikian pula halnya untuk $M_i$, dapat kita peroleh:

$$z = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Misalkan [a, b] suatu himpunan (set) S dan seluruh subinterval $S_1$ sub-himpunan yang terpisah (*disjoint sub sets*) sebanyak n, maka:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_n$$

Selanjutnya, kita dapat melihat bahwa $(x_i - x_{i-1})$ merupakan suatu ukuran (dalam hal ini panjang) dari himpunan $S_i$ (dalam hal ini suatu subinterval). Untuk menunjukkan ukuran tersebut, kita nyatakan sebagai $\mu\,(S_i)$. Dengan demikian, persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$z = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(S_i)$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(S_i)$$

Persamaan ini akan menjadi bentuk umum. Perhitungan-perhitungan batas bawah dan batas atas dapat digabungkan dengan bagian dari himpunan (set) S di atas. Misalnya m adalah batas bawah dari fungsi f (x) dan M adalah batas atas, maka:

$$m\,\mu\,(S) < z < Z < M\,\mu\,(S)$$

Selanjutnya, luas di bawah kurva adalah A, maka:

$z < A < Z$

Sekarang marilah kita gunakan proses limit untuk perhitungan-perhitungan tersebut. Maksudnya adalah untuk menunjukkan bahwa z dan Z akan menuju ke suatu limit, dan limit itu adalah A. Untuk menjelaskannya, digunakan perbedaan antara $m_i$ dan $M_i$ dalam suatu interval $(x_{i-1}, x_i)$ yang akan menjadi bertambah kecil. Misalkan:

$$Z - z = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\mu\,(S_1)$$

Apabila $\alpha$ adalah perbedaan yang terbesar antara $M_i$ dan $m_i$, maka $\alpha \geq M_i - m_i$, sehingga

$$Z - z = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\mu \quad (S_1) \leq \overset{n}{\underset{i=1}{X}} \alpha\mu(S_1)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} (S_i) = \alpha(b - a)$$

$\alpha$ akan menuju/mendekati nilai nol sebagai sub-bagian (*sub division*) yang diulang-ulang kembali. Dengan demikian, diperoleh:

$$Z - z \leq \alpha(b - a) \to 0$$

Sebagai sub-bagian yang diulang-ulang. Hal ini merupakan suatu peroses limit dan dalam limit itu dapat kita nyatakan: Z ≠ z = A. Bila suatu limit dicapai, bentuk umumnya ditulis sebagai:

$$\int f\,(x)\,dx$$

*f (x)* dinyatakan adalah menyeluruh atas S (dalam hal ini atas interval [a, b]).

Secara grafik, proses dari z → A merupakan pendekatan luas (area) di bawah suatu kurva dari sebelah dalam (*inside*) kurva tersebut. Limit z dan Z akan menjadi sama untuk luas suatu kurva, yaitu A.

Jadi integral diartikan sebagai limit dari suatu penjumlahan tertentu dari angka-angka {f (x) dx}. Integrasi adalah proses pencapaian suatu limit, dan integral adalah limitnya. Dalam contoh-contoh yang diberikan, integral ini menjadi luas di bawah kurva.

## B. Integral Tak Tentu

Yang dimaksud dengan integral tak tentu adalah suatu model perhitungan integrasi untuk harga x yang tidak terbatas, tujuan dari penentuan dengan model integral tak tentu ini, hanya semata-mata untuk mencari fungsi asalnya.

Telah diuraikan terdahulu bahwa integral berhubungan dengan persoalan mencari fungsi semula dengan mengetahui laju perkembangan fungsi tersebut. Dengan kata lain, perbandingan tingkat perubahan variabel tidak bebasnya dengan tingkat perubahan variabel bebasnya. Oleh karena itu disebut juga sebagai kebalikan diferensial atau anti derivatif.

Pada perhitungan diferensial, kita dapat menggunakan kaidah-kaidah umum untuk memudahkan perhitungan seperti yang telah diutarakan pada Bab 8.

Walaupun demikian, pada perhitungan integral dapat mengikuti langkah-langkah dalam melakukan penjumlahan tertentu dan menilainya dengan suatu proses limit. Akan tetapi, pada pengintegralan ini tidak ada kaidah-kaidah umum seperti pada pendiferensialan, sehingga suatu integral harus diperoleh dari rumus pendiferensialan. Disamping itu, hal ini menyebabkan proses pengintegralan tidaklah semudah proses pendiferensialan.

Ada beberapa macam aturan (kaidah) untuk cara pengoperasian atau penggunaan integral ini sesuai menurut jenis fungsinya seperti:

1. **Fungsi Konstanta**
   - $\int 0\, dx = k$
   - $\int k\, dx = kx + c$
   - $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ ; $k$ = konstanta
2. **Fungsi Berpangkat n → y = x$^n$**

   Suatu fungsi berpangkat n (untuk n ≠ - 1), diberikan rumus sebagai berikut:

   $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

   Sedangkan untuk fungsi berpangkat dengan $n$ = -1, akan diberikan rumus:

   $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$

*Contoh:*

- $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c = 0{,}25x^4 + c$
- $\int 8dx = \frac{8x^{0+1}}{0+1} + c = 8x + c$
- $\int 4x^2 dx = \frac{4x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{4}{3}x^3 + c$
- $\int 5\, dx = 5\int dx = 5x + c$

3. **Fungsi Penjumlahan dan pengurangan**

   Untuk melakukan perhitungan dari model fungsi seperti ini (penjumlahan atau pengurangan fungsi), caranya adalah dengan melakukan pengitegralan dari masing-masing fungsi tersebut:

   $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

*Contoh:*

- $\int (3x^3 + 4x^2 + 5x)dx =$

  $\int (3x^3dx + 4x^2dx + 5x)dx = 3/4x^4 + 4/3x^3 + 5/2x^2 + c$

- $\int [x^2 + e^x] dx = \int x^2 dx + \int e^x dx$

  $= \frac{1}{3}x^3 + e^x + c$

- $\int \left[\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right] dx = \int \sqrt{x\, dx} + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$

  $\int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c =$

  $2/3x\sqrt{x} + 2\sqrt{x + c}$

**4. Fungsi Eksponensial**

Jika $y = e^x$, maka $\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{x}$ atau $dy = e^x\, dx$

- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$
- $\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c;\ \ b \neq 1$

*Contoh:*

Apabila kita temui: :$\int e^{3x+5} dx$.

Dengan memisalkan 3x + 5 = u, maka :$\frac{du}{dx} = 3 \rightarrow \therefore\ dx = 1/3\ du$

Sehingga: $\int e^{3x+5} dx \ = 1/3e^u\ du = 1/3 \int e^u\ du$

$= 1/3e^u + c$

$= \ e^{3x+5} dx$

**5. Fungsi Logarima**

Untuk mendiferensiasi fungsi logaritma Natural (In), sebagai berikut:

Jika $y = \ln x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ atau $dy = \frac{1}{x} dx \rightarrow y = \int \frac{1}{x} dx$

- $\int \frac{1}{x} dx = In\, x + c$
- $\int \ln x\ dx = x[\ln(x) - 1] + c$
- $\int \frac{f\prime(x)}{f(x)} dx = lnf(x) + c$ ; $f(x) > 0$
- $\int \frac{1}{ax^n} dx = \frac{1}{a} \int x^{-n} dx = \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{1+(n)} x^{-n+1}\right\} + c$

*Contoh:*

- Bila y = x In x – x, maka:

  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} + In\ x - 1 = In\ x$

Sehingga :$\int$ In x dx = x – x + c

- $\int \frac{2}{x} dx = \int \frac{2dx}{x} = 2\, In\, x + c$
- $\int \frac{2}{2x+5} dx = \ln(2x+5) + c; \quad 2x + 5 > 0$

**6. Model Berantai**

Bila g (x) = u, maka g’ (x) = $\frac{du}{dx}$ dan g’ (x) dx = du,

sehingga $\int F\,(x)\,dx = \int G\,(u)\,du$

*Contoh:*

- $y = \int \frac{dx}{1+x}$ misalkan: 1 + x = u maka

  $\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow \therefore du = dx$

  Jadi, $y = \int \frac{du}{u} = In\, u + c = In\,(x+1) + c$

- $y = \int e^{3x}$ dx misalkan 3x = u, maka

  $\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow \therefore du = dx$

  $\frac{du}{dx} = 3 \rightarrow \therefore dx = 1/3\, du$

  Jadi y = $\int 1/3e^{u}.du \;=\; 1/3\int e^{u}du$

  $= 1/3e^{u} + c$

  $= 1/3e^{3x} + c$

- $y = \int e^{2x3} dx\ misalkan\ 2x + 3 = u, maka$

  $\frac{du}{dx} = 2 \rightarrow \therefore dx = 1/2\, du$

  Jadi y = $\frac{\int 1}{2e^{u}}.du$

  $= \; 1/2\int e^{u}du$

  $= 1/2e^{u} + c$

  $= 1/2e^{2x+3} + c$

**7. Model Substitusi**

Integrasi dari dua buah integral dapat dilakukan dengan cara substitusi, yaitu salah salah satu dari integral dimisalkan terlebih dahulu dengan variabel lain, sehingga bentuk fungsinya akan lebih mudah dijabarkan ke dalam penyelesaian integral sesuai dengan bentuk rumus yang telah ada.

Misal bentuk fungsi integral tersebut adalah:

$$\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du = f(u) + c$$

Kalau diperhatikan bentuk integral di atas disubstitusikan dengan $\int dx$. (model seperti ini dapat juga dikatakan sebagai bentuk integral berantai).

*Contoh:*

- Jika kita akan mengintegralkan $\int \frac{x+3}{x^2+6x} dx$

  Misalkan: $u = x^2 + 6x$, maka $\frac{du}{dx} = 2x + 6$

  Karenanya pembilang $(x + 3) = ½ (du/dx)$. Sehingga:

  $$\int \frac{x+3}{x^2+6x} dx = \int \frac{1/2(\frac{du}{dx})}{u} dx$$

  $$= \frac{{}^1\!/_2 du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

  $$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\ln u + c$$

  $$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 6x) + c$$

- Jika kita memiliki akan mengintegralkan $\int 2x(x^2 + 1)dx$

  Dengan memisalkan: $u = x^2 + 1$

  $$\frac{du}{dx} = 2x$$

  $$du = 2x\, dx$$

  Maka $\int 2x(x^2 + 1)dx = \int u.du$

  $$= \frac{1}{2}u^2 + c$$

  $$= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 + c$$

**8. Model Integrasi Pemenggalan**

Model ini adalah merupakan pengintegrasian dari suatu fungsi integrant dengan cara membalik pendiferensialan hasil kali fungsi tersebut atau dapat juga dikatakan, bahwa integral dari fungsi integrant adalah merupakan perkalian variabel-variabel integrant dikurangi dengan integrant dari balik integrant tersebut seperti:

$$\int f(x)g(x)dx = \int u' \cdot v dv$$

Misal: $f(x) = u$,

$maka \frac{df(x)}{dx} = u' dan \int g(x)dx = v$

Maka:

$$\int f(x)g(x)dx = u \cdot v - \int u'v \cdot dv$$

*Contoh:*

- Jika kita akan mengintegralkan $\int 3x^2 lnx\ dx$

  Misalkan: $u$ = $3x^2$, maka $u'$ = 6x

  $v = \int \ln x\ dx$

  $v\ = \frac{1}{x} + c$

  Maka: $\int 3x^2 lnx\ dx = (3x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - \int (6x)\left(\frac{1}{x}\right) dx$

  $= 3x - \int 6\ dx$

  $= 3x - 6x + c$

  $= -3x + c$

## C. Integral Tentu

Integral tentu adalah merupakan model perhitungan integral dari suatu fungsi dalam nilai-nilai batas x tertentu, sehingga hasil penyelesaiannya dari perhitungan ini merupakan sebuah bilangan tetap atau terukur. Pada dasarnya aturan/kaidah maupun cara penyelesaian dari integral tertentu ini, sama saja dengan integral tak tentu, namun demikian, yang membedakan pada integral tertentu ini hanya pada nilai-nilai batas x tertentu, sehingga hasil yang diperoleh dapat dikatakan sebagai nilai luas di bawah kurvanya.

Misalkan fungsi y = f(x) kontinu dalam interval $a \le x \le b$ kemudian interval tersebut dibagi menjadi subbagian, yaitu:

$\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots \dots \dots, \Delta_{x_n}$

Atau ditulis:

$\Delta_{BX_1} = X_1 - X_0, \Delta_{X_2} = X_2 - X_1, \dots \dots \dots \dots \dots .., \Delta_{X_n} = X_n - X_{n-1}$

Dalam setiap interval: $[X_0, X_1], [X_1, X_2], \dots \dots \dots, [X_{n-1}, X_n]$

Ditentukan suatu titik dengan notasi $\propto_1, \propto_2, \dots \dots \dots \dots, \propto_n$ sehingga:

$X_0 \le \propto_1 \le x_1, x_1 \le \propto_2 \le x_2, \dots \dots \dots .., x_{n-1} \le \propto_n \le x_n$ setiap titik tersebut di atas ditentukan nilai fungsi $f(\propto_1), f(\propto_2), \dots \dots \dots, f(\propto_n)$ dibentuk suatu penjumlahan:

$$S_n = f(\propto_1)\Delta_{X_1} + f(\propto_2) + \dots \dots \dots + f\left(\propto_n \Delta_{X_n}\right) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\propto_1)\Delta_{x_i}$$

Penjumlahan ini disebut integral dari fungsi y = f(x) pada interval $[\propto, b]$ atau $\propto \le x \le b$

Untuk $\Delta_{x_i} \rightarrow 0$, maka: $\lim\limits_{i \to o} \left( \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i)\Delta_{x_i} \right) = \int_a^b f(x) dx$

dimana a disebut limit bawah integral, b disebut limit atas integral, interval [a, b] disebut interval integral dan x disebut variabel integrasi. Jika f(x) diintegrasikan pada interval [a, b] maka:

$\int_{\propto}^{b} f(x)dx = f(x)$

Jika b > a maka:

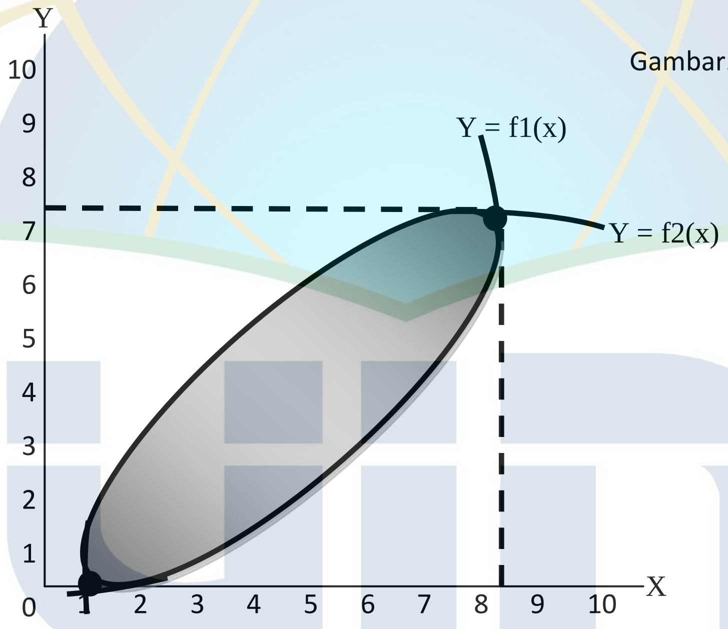
$\int_{\propto}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{\propto} f(x)dx$

Secara umum, integral tertentu dinyatakan:

$\int_{a}^{b} x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \Big|_a^b \qquad jika\, n \neq -1$

Dimana:

a ialah batas bawah ; b ialah batas atas




Gambar. 10.2

Sifat-sifat integral tertentu:

1. $\int_{a}^{b} kf(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx$
2. $\int_{a}^{b} [f_1(x)dx \pm \cdots \pm f_n(x)dx$

   $= \int_{a}^{b} f_1(x)dx \pm \int_{a}^{b} f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_{a}^{b} f_n(x)dx$
3. $\int_{a}^{b} f(x)dx$

   $= \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx, \;\; dimana: a < c < b$
4. $\int_{a}^{b} f(x)dx = 0, \;\; dimana: \; a = b$

**D. Integral Parsial**

Selanjutnya kita akan membahas integral parsial, yaitu suatu proses pengintegrasian suatu fungsi integral dengan fraksi parsial, dan ini lebih sulit jika dibandingkan dengan pengintegrasian sebelumnya. Model penyelesaian integrasi semacam ini sesungguhnya merupakan pengintegrasian fungsi rasional, di mana penyebut dari fungsi ini berpangkat ganda dan terdiri dari beberapa fraksi (Supangat, 2006). Secara umum bentuk fungsi yang berbentuk fraksi parsial tersebut, dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

Dalam bentuk integral seperti ini jika *f(x)* sebagai fungsi pembilang memiliki pangkat (derajat) yang lebih rendah dari fungsi penyebutnya *g(x)*, maka secara keseluruhan harus difaktorkan dan dibagi-bagi atas beberapa fraksi parsial dengan menyamakan variabel penyebut dan setiap fraksi penyebut berpangkat urut dari pangkat satu sampai dengan pangkat *n* menurut jenisnya.

Kemudian bagaimanakah jika suatu fungsi *(x)* adalah suatu fungsi rasional yang tak sebenarnya, dimana derajat pangkat pembilang lebih tinggi dari derajat pangkat fungsi penyebutnya?

Jika derajat pangkat pembilang lebih tinggi dari derajat pangkat fungsi penyebut, maka pengintegralan fungsi tersebut, terlebih dahulu dibagi-bagi atas beberapa fraksi integralnya, sehingga masing-masing fraksi merupakan fungsi rasional yang sebenarnya. Setelah penyebut dibagi-bagi atas beberapa fraksi dan membentuk beberapa fungsi dengan penyebut adalah fungsi-fungsi dari fraksi-fraksi itu, maka pada akhirnya barulah fungsi integral tersebut dapat diambil suatu kesimpulan bahwa kaidah (aturan) pengintegralan suatu fungsi dengan metode fraksi parsial hanya mungkin dilakukan apabila fungsi itu merupakan fungsi rasional yang sebenarnya, maka sejalan dengan hal tersebut, pada proses selanjutnya terlebih dahulu dicari hasil bagi antara pembilang dan penyebutnya, sehingga fungsi dimaksud terpecah secara parsial dan menjadi fungsi yang terdiri atas bagian-bagian yang membentuk fungsi rasional sebenarnya dan bukan fungsi rasional tak sebenarnya (Supangat, 2006).

Pengintegrasian model rasional adalah dimaksudkan membagi-bagi fungsi rasional tersebut menjadi beberapa fraksi parsial. Untuk melakukan pengintegrasian model ini, perlu diperhatikan beberapa jenis dari fraksi parsialnya, yaitu (Supangat, 2006):

**1. Faktor Linear Tunggal**

Sebuah fungsi rasional dikatakan rasional dengan faktor linear tunggal jika penyebut merupakan sebuah fungsi linear tunggal, seperti berikut:

$$f(x) = \frac{a}{ax+b}, maka \int f(x)dx = \int \left(\frac{a}{ax+b}\right) dx$$

**2. Faktor Linear Berulang**

Jika sebuah fungsi rasional adalah fungsi rasional yang penyebutnya merupakan fungsi linear berpangkat n atau perkalian beberapa buah fungsi linear, maka fungsi tersebut dinamakan rasional dengan faktor linear berulang, seperti berikut:

$$f(x) = \frac{k}{(ax+b)^n}$$

Maka, model integrasi dari fungsi di atas dinyatakan seperti berikut:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{A}{ax+b}\right) dx + \int \left(\frac{B}{(ax+b)^2}\right) dx + \ldots \int \left(\frac{Z}{(ax+b)^n}\right) dx \ldots \ldots$$

**3. Faktor Kuadrat Tunggal**

Sebuah fungsi rasional dengan penyebutnya merupakan fungsi kuadrat, maka fungsi rasionalnya dinamakan fungsi rasional dengan faktror kuadrat tunggal. Adapun yang dimaksud dengan penyebut fungsi kuadrat, dinyatakan sebagai barikut:

$$f(x) = \frac{k}{ax^2+bx+c}$$

Dari bentuk fungsi di atas, proses penyelesaian secara parsial dalam bentuk (model) integrasi dari fungsinya dinyatakan seperti berikut:

$$\int \frac{k}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{Adx}{a_{1_x} \pm c_1} + \int \frac{Bdx}{(a_z x \pm c_2)}$$

**4. Faktor Kuadrat Berulang**

Jika sebuah fungsi rasional merupakan sebuah fungsi kuadrat berpangkat n atau perkalian beberapa buah fungsi kuadrat, maka fungsi tersebut dinamakan fungsi rasional kuadrat berulang.

$$f(x) = \frac{k}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Dari bentuk fungsi di atas, proses penyelesaian secara parsial dalam bentuk (model) integrasi dari fungsi dinyatakan seperti berikut:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{(Ax+B}{ax^2+bx+c}\right) dx + \int \left(\frac{(C_X+D)}{(ax^2+bx+c)}\right) dx$$
$$+\int \left(\frac{(E_x+F)}{(ax^2+bx+c)^n}\right) dx$$

## E. Penerapan Ekonomi

Integral sering digunakan dalam analisis ekonomi, misalnya mencari surplus konsumen, surplus produsen, dan lain-lain.

### 1. Surplus Konsumen

Telah dijelaskan bahwa fungsi permintaan P = f(x) menyatakan jumlah barang yang akan dibeli oleh konsumen pada saat tingkat harga tertentu, misalnya harga barang di pasar adalah PE dan konsumen dapat memberikan barang itu dengan harga yang lebih tinggi dari PE, maka kelebihan tersebut merupakan keuntungan pembeli (konsumen) keuntungan seperti ini dinamakan surplus konsumen ($S_K$) surplus konsumen dapat ditunjukkan secara geometris seperti pada Gambar 10.3.

Secara sederhana surplus konsumen dapat dicontohkan sebagai berikut. Misalkan Amir hendak naik ojek dari Stasiun Senen menuju Salemba, dalam benak Amir tarif ojek dari Stasiun Senen sampai dengan Salemba adalah sebesar Rp 20.000,-, namun setelah negosiasi dengan tukang ojek didapatkanlah suatu tarif yang disepakati sebesar Rp 15.000,-, maka surplus konsumen yang diperoleh oleh Amir adalah sebesar Rp 20.000 (*willingness to pay* dari Amir) dikurangi dengan Rp 15.000,- (harga pasar) yaitu sebesar Rp 5.000,-

Secara matematik surplus konsumen dinyatakan dengan rumus:

$$S_K = \int_0^{Q_e} f(Q_d)d_Q - P_eQ_e$$

Di mana:

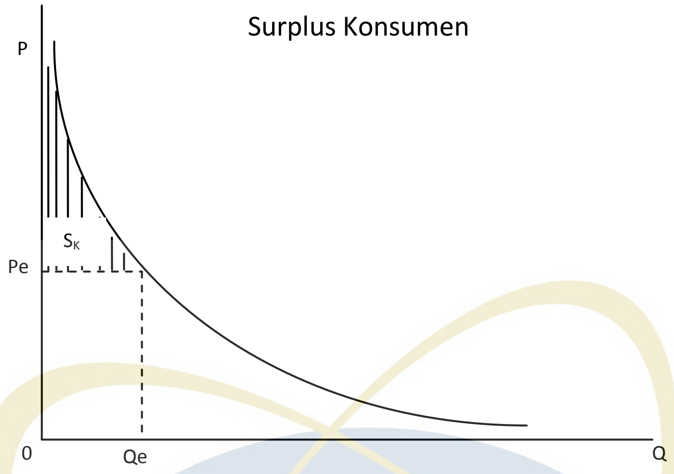
$S_K$ : Surplus Konsumen

$F(Q_d)$ : Fungsi permintaan

$P_e$ : Harga di tingkat e

$Q_e$ : Jumlah di tingkat e

Gambar 10.3.
Surplus Konsumen




## 2. Surplus Produsen

Pada tingkat harga $P_E$ pihak produsen bersedia menjual barangnya di bawah harga pasar $P_E$, maka penjualan di bawah harga tersebut merupakan keuntungan produsen. Keuntungan seperti ini disebut surplus produsen ($S_p$). Secara geometris surplus produsen ini dapat ditunjukkan seperti pada Gambar 10.4:

Secara sederhana surplus produsen dapat dicontohkan sebagai berikut. Misalkan tukang ojek yang ditumpangi oleh Amir dari Stasiun Senen menuju Salemba, dalam benak tukang ojek tarif ojek dari Stasiun Senen sampai dengan Salemba adalah sebesar Rp 12.000,-, namun setelah negosiasi dengan penumpang didapatkanlah suatu tarif yang disepakati sebesar Rp 15.000,-, maka surplus produsen yang diperoleh oleh tukang ojek adalah sebesar Rp 15.000 (harga pasar) dikurangi dengan Rp 12.000 (*willingness to sell* dari tukang ojek yaitu surplus produsen sebesar Rp 3.000,-

Secara matematik surplus konsumen dinyatakan dengan rumus:

$$S_P = P_e Q_{e-} \int_0^{Q_E} f(Q_s) d_Q$$

Di mana:

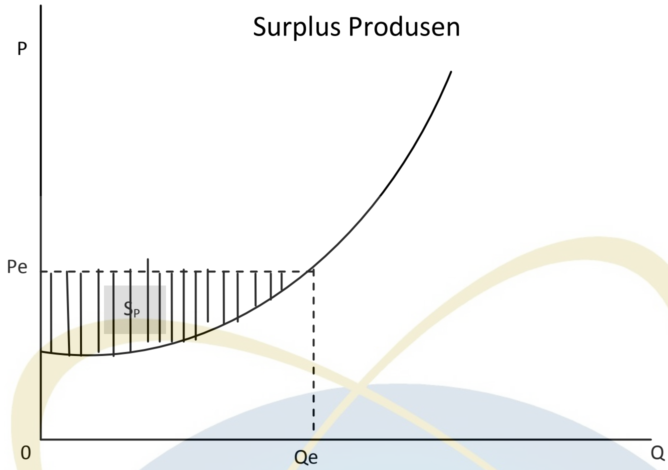
$S_P$ : Surplus Produsen

$F(Q_s)$ : Fungsi permintaan

$P_E$ : Harga di tingkat E

$Q_E$ : Jumlah di tingkat E

Gambar 10.4.
Surplus Produsen




*Contoh:*

1. Apabila diketahui fungsi permintaan adalah P = 45 – 0.5Q, hitunglah surplus konsumen pada harga Pe = 325 dan Qe = 25

Jawab:

$$S_K = \int_0^{Q_e} f(Q_d)d_Q - P_eQ_e$$

$$Sk = \int_0^{25}(45 - 0.5Q)dQ - (325)(25)$$

$$Sk = [45Q - 0.25Q^2]_0^{25} - 812.5$$

Sk = $[45(25) – 0.25(25)^2] – 0 – 812.5 = 156.25$

Sehingga jumlah surplus konsumen ialah sebesar 156.25

2. Pada suatu fungsi penawaran tertentu P = $(Q + 3)^2$, hitunglah surplus produsen pada tingkat harga Pe = 81 dan Qe = 6

Jawab:

$$S_P = P_eQ_{e-} \int_0^{Q_E} f(Q_s)d_Q$$

$$Sp = (81)(6) - \int_0^6 (Q+3)^2 dQ$$

$$Sp = 486 - [\tfrac{1}{3}(Q+3)^3]_0^6$$

$$Sp = 486 - [\tfrac{1}{3}(6-3)^3 - \tfrac{1}{3}(0+3)^3] = 252$$

Sehingga jumlah surplus produsen ialah sebesar 252

3. Pada pasar persaingan sempurna, diketahui fungsi permintaan $P_d = 113 – Q^2$, dan fungsi penawaran adalah $P_S = (Q + 1)^2$, hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen!

Jawab:

$Q^2 + 2Q + 1 = 113 - Q^2$

$2(Q^2 + Q - 56) = 0$

$(Q + 8)(Q - 7) = 0$

$Q_1 = -8$; $Q_2 = 7$

Yang dipilih adalah Q = 7, sebab tidak mungkin kuantitas keseimbangan dalam pasar yang negatif. Kemudian Q yang didapat dimasukkan kepada salah satu fungsi harga, misalkan dimasukkan pada fungsi harga permintaan

$Pd = 113 - Q^2$

$= 113 - (7)^2$

$P = 64$

Atau dapat pula dimasukkan pada fungsi harga penawaran:

$Ps = (Q + 1)^2$

$= (7 + 1)^2$

$P = 64$

**Surplus Konsumen:**

$$S_K = \int_0^{Q_e} f(Q_d) d_Q - P_e Q_e$$

$$Sk = \int_0^7 (113 - Q^2) dQ - (64)(7) = [113Q - \tfrac{1}{3} Q^3]_0^7 - 448 = 228{,}67$$

Sehingga surplus konsumen adalah sebesar 228,67

**Surplus Produsen:**

$$S_P = P_e Q_{e-} \int_0^{Q_E} f(Q_s) d_Q$$

$$Sp = (64)(7) - \int_0^7 (Q + 1)^2 \, dQ = 448 - [\tfrac{1}{3} (Q + 1)^3]_0^7$$

$$Sp = 448 - (170{,}67 - 0{,}33) = 277{,}67$$

Sehingga surplus produsen adalah sebesar 277,67

4. Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang masing-masing adalah $\rho = e^{-x+3}$ dan $\rho = e^{2x}$. Hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen

Jawab:

Fungsi permintaan $D : \rho = e^{-x+3}$ dan fungsi penawaran $S : \rho = e^{2x}$

Keseimbangan pasar : $e^{-x+3} = e^{2x}$

$-x + 3 = 2x \rightarrow x_E = 1 \rightarrow P_E = e^{2x}$, sehingga titik keseimbangan pasar adalah $E(1, e^2)$

**Surplus Konsumen:**

$$Sk = \int_0^1 e^{-x+3}dx - 1.e^2$$
$$= e^3 \int_0^1 e^{-x}dx - e^2$$
$$= e^3\{(-e^{-x})\}]_0^1 - e^2$$
$$= e^3 (-e^{-1} + 1) - e^2$$
$$= -e^2 + e^3 - e^2$$
$$Sk = e^3 - 2e^2$$

**Surplus produsen:**

$$Sp = 1.e^2 - \int_0^1 e^{2x}\,dx$$
$$= e^2 - ½ (e^2 - 1)$$
$$Sp = ½ e^2 + ½ = ½ (e^2 + 1)$$

**3. Fungsi Biaya**

Jika kita hanya mengetahui berapa biaya marjinal dari suatu perusahaan, kemudian kita ingin mengetahui berapa biaya totalnya, maka dengan menggunakan integral kita dapat menghitung berapa fungsi biaya total dari perusahaan tersebut.

*Contoh*:

Jika diketahui fungsi biaya marjinal ialah $MC = f(Q) = 8e^{0,2Q}$ dan biaya tetap ialah 100, tentukanlah fungsi biaya totalnya ($TC$)?

$$TC = C(Q) = \int 8e^{0,2Q}dQ$$
$$= 40e^{0,2Q} + c$$

Saat $Q = 0 \rightarrow TC = 100$

Maka: $100 = 40e^{0,2(0)} + c$

$100 = 40\,(1) + c$

$C = 60$

Sehingga fungsi biaya total: $TC = C(Q) = 40e^{0,2Q} + 60$

**4. Tabungan Masyarakat**

Integral dapat pula dipergunakan untuk menentukan tabungan dari masyarakat jika kita hanya mengetahui fungsi dari kecenderungan menabung marjinal (*marginal propensity to save*) dari masyarakat pada suatu tingkat pendapatan tertentu.

*Contoh:*

Jika diketahui suatu fungsi kecenderungan menabung marjinal dari masyarakat adalah $S'(Y) = 0{,}8 - \frac{0{,}2}{\sqrt{Y}}$. Jika terjadi *dis-saving* sebesar 5 pada saat pendapatan masyarakat hanya sebesar 100. Tentukan tabungan dari masyarakat?

Fungsi tabungan: $S(Y) = \int S'(Y)dY$

$$= \int \left[0{,}8 - \frac{0{,}2}{\sqrt{Y}}\right] dY$$

$$= \int [0{,}8 - 0{,}2Y^{-0{,}5}]\, dY$$

$$= 0{,}8Y - 0{,}4Y^{0{,}5} + c$$

Saat $Y = 100$ -→ $S = -5$

Maka: $-5 = (0{,}8)\,100 - 0{,}4\,(100)^{0{,}5} + c$

$-5 = 80 - 4 + c$

$c = -81$

Sehingga $S(Y) = 0{,}8Y - 0{,}4Y^{0{,}5} - 81$

**5. Fungsi Frekuensi dan Probabilitas**

a. Probabilitas dalam menit pada saat menunggu giliran untuk dilayani pada suatu restoran ditentukan pada fungsi frekuensi: $f(t) = \frac{4}{81}t^3$ untuk $0 \le t \le 3$. Apakah probabilitas menunggu antara 1 dan 2 menit?

$$P = \int_1^2 \frac{4}{81}t^3\, dt = \frac{1}{81}\, t^4\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{81}\,(16) - \frac{1}{81}\,(1) = 0{,}1852$$

Probabilitas menunggu pelayanan antara 1 hingga 2 menit ialah sebesar 0.1852 atau 18,52%

*b.* Proporsi penyelesaian tugas pada suatu hari yang telah ditentukan dijelaskan oleh fungsi probabilitas $f(x) = 12(x^2 - x^3)$ untuk $0 \le x \le 1$.

Apakah probabilitas dari: (1) tugas yang mampu diselesaikan pada hari tersebut adalah dibawah 50%; (2) tugas mampu diselesaikan di atas 50%

- $P_a = \int_0^{0.5} 12(x^2 - x^3)dx = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{0.5}$

$$= 12\left[\left(\frac{0.125}{3} - \frac{0.0625}{4}\right) - 0\right] = 0.3125$$

- $P_b = \int_{0.5}^{1} 12(x^2 - x^3)dx = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0.5}^{1}$

  $= 12\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0.125}{3} - \frac{0.0625}{4}\right)\right] = 0.6875$

Total probabilitas ialah, $P_a + P_b = 0.3125 + 0.6875 = 1$

**Latihan**

1. Selesaikanlah integral dari fungsi berikut:
   a. $\int 9x^2 dx$
   b. $\int (x^2 - \sqrt{x} + 4) dx$
   c. $\int \sqrt{2 + 5x}\, dx$
   d. $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
   e. $\int \frac{(x+1+}{(x+1)^2+(a+1)^2} dx$
2. Jika diketahui fungsi permintaan adalah *Q= 60 – 0,50 P*, dan fungsi penawaran adalah *Q = -45 +3P*. Hitunglah besarnya surplus yang dinikmati oleh konsumen maupun oleh produsen?
3. Penawaran dan permintaan akan suatu barang di pasar masing-masing ditunjukkan oleh $Q_s = -30 + 5P$ dan $Q_d = 60 - 4P$. Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh konsumen dan produsen?
4. Carilah persamaan fungsi penerimaan total dan fungsi permintaan dari suatu perusahaan yang penerimaan marjinalnya *MR = 900 – 28Q*?
5. Jika diketahui $I(t) = 8t^{1/3}$, temukan tingkat pembentukan modal pada (a) 5 tahun, dan (b) 3 sampai 10 tahun?

# BAB 11
# MATRIKS

## A. Pengertian Matriks

Salah satu hasil penemuan penting dalam matematika adalah matriks dan vektor, yang merupakan pengembangan lanjutan dari sistem persamaan linier. Sehingga aljabar matriks dan aljabar vektor sering disebut pula dengan istilah aljabar linier. Pada bab 11 ini kita akan menjelaskan hal ikhwal dasar yang berkenaan dengan matriks. Konsep-konsep matriks serta kaidah-kaidah pengoperasiannya dijelaskan secara bertahap, satu demi satu.

Matriks secara umum dapat didefinisikan sebagai suatu susunan bilangan dalam bentuk empat persegi panjang (Supangat, 2006). Matriks dapat pula didefinisikan sebagai kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung (Dumairy, 2007).

Secara umum, suatu matriks dituliskan sebagai:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Penulisan matriks dapat menggunakan tanda kurung bisasa atau tanda kurung siku. Bilangan-bilangan yang terkandung di dalam suatu matriks dinamakan unsur. Jajaran horizontal unsur-unsur matriks dinamakan baris, sedangkan jajaran vertikal unsur-unsur matriks dinamakan kolom.

Unsur suatu matriks secara umum dilambangkan dengan notasi $a_{ij}$ , $i$ menunjukkan baris sedangkan $j$ menunjukkan kolom. Demikian $a_{ij}$ berarti unsur matriks A pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$.

Matriks terdiri atas satu atau sejumlah baris dan satu atau sejumlah kolom, tetapi jumlah baris dan jumlah kolom suatu matriks tidak harus sama. Matriks yang terdiri atas *m* baris dan *n* kolom dinamakan matriks berukuran *m* x *n* atau matriks berorde *m* x *n*. Dengan demikian banyaknya baris dan kolom melambangkan ukuran atau orde atau dimensi dari matriks yang bersangkutan. Matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya (*m* = *n*) dinamakan matriks bujursangkar (*square matrix*).

Matriks tidak mempunyai nilai numerik. Hal ini memberikan makna bahwa meskipun matriks merupakan suatu kumpulan bilangan, tetapi ia sendiri tidak melambangkan sesuatu bilangan. Hal ini berbeda dengan determinan, yang bersifat numerik. Selain dilambangkan dengan huruf besar bercetak tebal, matriks sering pula dituliskan dengan lambang unsur umumnya dikurung, misalnya:

$A = (a_{ij}) = [a_{ij}]$ atau ;

$A_{m \times n} = (a_{ij})_{mxn} = [a_{ij}]_{m \times n}$

Contoh-contoh Matriks

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Pada matriks yang pertama merupakan contoh dari matriks yang memiliki orde 2 x 3, sebab memiliki 2 baris dan 3 kolom. Kemudian berikutnya ialah matriks dengan orde 3 x 2, sebab memiliki 3 baris dan 2 kolom. Sedangkan yang terakhir adalah matriks bujur sangkar karena memiliki orde yang sama yaitu 2 x 2. Jika matriks pertama, kedua dan ketiga masing-masing diberi nama **X, Y,** dan **Z**, maka dapatlah dituliskan: $\mathbf{X}_{2 \times 3}$, $\mathbf{Y}_{3 \times 2}$, dan $\mathbf{Z}_{2 \times 2}$.

Berikutnya apakah yang dimaksud dengan vektor. Secara umum vektor dapat didefinisikan sebagai bentuk matriks khusus yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom. Dalam hal ini dibedakan dua macam vektor yaitu vektor-baris dan vektor-kolom. Vektor baris tak lain adalah matriks sebaris atau matriks barbaris tunggal. Sedangkan vektor kolom adalah matriks sekolom atau matriks berkolom tunggal.

Suatu vektor biasanya dilambangkan dengan sebuah huruf kecil bercetak tebal atau huruf kecil biasa beranak-panah di atasnya. Kecuali itu bisa pula dilambangkan dengan huruf besar (seperti halnya lambang matriks), mengingat vektor pada dasarnya juga merupakan sebuah matriks, yakni matriks berorde *m* x 1 (vektor kolom) atau berorde 1 x *n* (vektor baris).

Contoh vektor baris:

a = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

b = $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Contoh vektor kolom:

c = $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ d = $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

Unsur suatu vektor dilambangkan dengan huruf kecil sesuai dengan nama vektornya dan diikuti oleh indeks kolom atau indeks barisnya. Dengan demikian $a_{oj}$ menunjukkan unsur dari vektor-baris a kolom ke-*j*. Sedangkan $c_{io}$, menunjukkan unsur dari vektor-kolom c baris ke-*i*. Dalam contoh di atas, $a_{o2}$, berarti unsur dari vektor-baris a kolom k-2 yaitu bilangan -2.

Dimensi suatu vektor tercermin dari banyaknya unsur pada vektor yang bersangkutan. Suatu vektor baris yang memiliki *n* unsur dinamakan vektor berdimensi –*n*. Pada contoh di atas, a ialah vektor-baris berdimensi 3. Suatu vektor kolom yang memiliki *m* unsur dinamakan vektor berdimensi –*m*. Vektor c pada contoh di atas ialah vektor berdimensi 3.

Dua buah matriks, yaitu matriks A dan matriks B dikatakan sama (dan dituliskan A = B) apabila keduanya berorde sama dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama ($a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap *i* dan *j*). Jika matriks A tidak sama dengan matriks B, ditulis A ≠ B.

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -5 & 9 \end{bmatrix}$

Berdasarkan contoh di atas, matriks A = matriks B (**A = B**), namun matriks A tidak sama dengan matriks C (**A ≠ C**) dan matriks B tidak sama dengan matriks C (**B ≠ C**).

Dimensi matriks adalah konsep operasional dari matriks, seperti:

1. Kesamaan Matriks
2. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks
3. Perkalian Matriks

Matriks A dan B dikatakan sama jika:

- A dan B mempunyai jumlah baris yang sama dan juga jumlah kolom yang sama
- Semua unsur yang seletak (bersesuaian) sama

Kemudian, dua buah vektor dikatakan sama apabila keduanya sejenis, sedimensi dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama.

Contoh:

$a = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

dari contoh di atas vektor a sama dengan vektor b (a = b), namun vektor x tidak sama dengan vektor y (v ≠ y). Dapat pula dituliskan a ≠ x ≠ v dan b ≠ x ≠ y.

Dengan penjelasan di atas, matriks dapat pula dipandang sebagai kumpulan vektor. $A_{mxn}$ adalah matriks A yang merupakan kumpulan dari *m* buah vektor-baris dan *n* buah vektor-kolom.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ adalah matriks yang merupakan kumpulan dari vektor-vektor: $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

## B. Bentuk Khas Matriks

Matriks memiliki berbagai bentuk khas berkenaan dengan unsur-unsur yang dikandungnya. Sebelum kita mengenal bentuk-bentuk khas tersebut, ada baiknya terlebih dahulu difahami pengertian tentang diagonal utama pada matriks. Diagonal utama ialah diagonal yang mengurutkan secara silang unsur baris pertama kolom pertama ke unsur baris terakhir kolom terakhir, yakni diagonal yang bergerak dari sudut kiri-atas menuju ke sudut kanan-bawah (Dumairy, 2007)

**1. Matriks Satuan**

Matriks satuan atau matriks identitas ialah matriks bujursangkar yang semua unsur pada diagonal utama adalah angka-angka 1 sedangkan unsur-unsur lainnya nol. Dinamakan matriks satuan karena sifat matriks ini mirif dengan bilangan 1. Penulisannya lazim dilambangkan dengan notasi $I_n$, dimana indeks $n$ mencerminkan ordenya. Demikian $I_2$ berarti matriks satuan berorde 2 x 2, $I_4$ berarti matriks satuan berorde 4 x 4, dan sebagainya.

Contoh:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**2. Matriks Diagonal**

Matriks diagonal ialah matriks bujursangkar yang semua unsurnya nol kecuali pada diagonal utama.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal pada contoh terakhir di atas sekaligus juga adalah matriks satuan. Matriks identitas memang merupakan bentuk khusus atau bagian dari matriks diagonal. Jika dua matriks diagonal yang seorde dikalikan, hasilnya akan berupa matriks diagonal juga.

**3. Matriks Nol**

Matriks nol ialah matriks yang semua unsurnya nol. Matriks semacam ini lazim juga dilambangkan dengan angka 0.

Contoh:

$$0_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{3\,x\,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setiap matriks jika dikalikan dengan matriks nol akan menghasilkan matriks nol.

**4. Matriks Ubahan**

Matriks ubahan (*transpose matrix*) ialah matriks yang merupakan hasil pengubahan matriks lain yang sudah ada sebelumnya, di mana unsur-unsur barisnya menjadi unsur-unsur kolom dan unsur-unsur kolomnya menjadi unsur-unsur baris. Matriks ubahan biasanya dituliskan dengan menambahkan tanda aksen (′ ) pada notasi matriks aslinya. Ubahan dari matriks A $_{m\,x\,n}$ = [$a_{ij}$] adalah $A'_{m\,x\,n}$ = [$a'_{ji}$].

Contoh:

- A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ A’ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
- B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ B’ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
- C = $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ C’ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Ubahan dari suatu matriks ubahan adalah matriks aslinya.

Jadi, (A')' = A, (B')' = B. (C')' = C.

**5. Matriks Simetrik**

Matriks simetrik ialah matriks bujursangkar yang sama dengan ubahannya. Matriks A dikatakan simetrik apabila A = A'

Contoh:

- A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ A’= $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

  A merupakan matriks simetrik, sebab **A = A’**
- B = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ B’ = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

  **B** merupakan matriks simetrik, sebab **B = B’**

Jika sebuah matriks simetriks dikalikan dengan ubahannya, hasilnya akan berupa kuadrat dari matriks tersebut.

Jadi, bila A simetrik maka AA' = AA = $A^2$. Matriks satuan juga merupakan matriks simetrik.

**6. Matriks Simetrik Miring**

Matriks simetrik miring ialah matriks bujursangkar yang sama dengan negatif ubahannya. Matriks A dikatakan simetrik miring (*skew symmetric*) apabila A = − A' atau A' atau A' = -A.

Contoh:

- A = $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ A’ = $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ -A’ = $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

A merupakan matriks simetrik miring, sebab **A = -A’**

Ciri khas matriks simetrik miring ialah diagonal utamanya terdiri atas bilangan-bilangan nol.

**7. Matriks Balikan**

Matriks balikan (*inverse matrix*) ialah matriks yang apabila dikalikan dengan suatu matriks bujursangkar menghasilkan sebuah matriks satuan. Jika A merupakan sebuah matriks bujursangkar, maka balikannya dituliskan dengan notasi $A^{-1}$, dan $AA^{-1} = I$.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$A^{-1}$ adalah balikan dari A

Tidak setiap matrik bujursangkar mempunyai balikan.

**8. Matriks Skalar, Ortogonal, Singular dan Nonsingular**

Matriks skalar ialah matriks diagonal yang unsur-unsurnya sama atau seragam ($\lambda$). Dalam hal $\lambda = 1$, matriks skalar yang bersangkutan sekaligus juga adalah matriks satuan. Matriks skalar juga merupakan hasilkali sebuah skalar dengan matriks satuan, $\lambda$ I = matriks skalar $\lambda$.

Matriks ortogonal ialah matriks yang apabila dikalikan dengan matriks ubahannya menghasilkan matriks satuan, $AA' = I$.

Matriks singular ialah matriks bujursangkar yang determinannya sama dengan nol, matriks semacam ini tidak mempunyai balikan. Sedangkan matriks non-singular ialah matriks bujursangkar yang determinannya tidak nol, matriks semacam ini mempunyai balikan.

**C. Pengoperasian Matriks**

**1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks**

Penjumlahan ataupun pengurangan dua buah matriks hanya dapat dilakukan apabila keduanya memiliki orde sama. Jumlah atau selisih dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah sebuah matriks baru $C = [c_{ij}]$ yang berorde sama, yang unsur-unsurnya merupakan jumlah atau selisih unsur-unsur A dan B.

$$\boxed{A \pm B = C \quad \text{dimana} \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

*Contoh:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Karena penjumlahan antar bilangan bersifat komutatif dan asosiatif, padahal matriks adalah kumpulan bilangan, maka untuk penjumlahan antar-matriks berlaku pula kaidah komutatif dan kaidah asosiatif.

| | |
|---|---|
| Kaidah Komutatif | : A + B = B + A |
| Kaidah Asosiatif | : A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C |

**2. Perkalian Matriks dengan Bilangan (Skalar)**

Hasil kali sebuah matriks A = $[a_{ij}]$ dengan suatu skalar atau bilangan nyata $\lambda$ adalah sebuah matriks baru B = $[b_{ij}]$ yang berorde sama dan unsur-unsurnya $\lambda$ kali unsur-unsur matriks semula ($b_{ij} = \lambda\ a_{ij}$). Suatu matriks dapat dikalikan dengan bilangan skalar mengalikan setiap unsur matriks dengan suatu bilangan:

| | |
|---|---|
| $\lambda$ A = B | dimana $b_{ij} = \lambda\ a_{ij}$ |

Untuk perkalian matriks dengan skalar berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif.

| | |
|---|---|
| Kaidah Komutatif | : $\lambda$ A = A $\lambda$ |
| Kaidah Distributif | : $\lambda$ (A ± B) = $\lambda$ A ± $\lambda$ B |

*Contoh:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$ dengan bilangan skalar ($\lambda$) = 4

Maka $\lambda$**A** = 4**A** = **B** = $\begin{bmatrix} 8 & -16 & 20 \\ 4 & 32 & 12 \\ 16 & 28 & 24 \end{bmatrix}$

**3. Perkalian Matriks dengan Matriks**

Suatu matriks A dan matriks B berlaku perkalian, jika dipenuhi syarat perkalian matriks, yaitu banyaknya kolom dari matriks A harus sama dengan banyaknya baris dari matriks B. Jika tidak demikian, maka perkalian matriks tidak dapat dilaksanakan. Hasilkali dua matriks $A_{m\ x\ n}$ dengan $B_{n\ x\ p}$ adalah sebuah matriks baru $C_{m \times p}$, yang unsur-unsurnya merupakan perkalian silang unsur-unsur baris matriks A dengan unsur-unsur kolom matriks B.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Untuk perkalian antarmatriks berlaku kaidah asosiatif dan kaidah distributif, tetapi tidak berlaku kaidah komutatif.

| | |
|---|---|
| Kaidah Asosiatif | : A (BC) = (AB) C = ABC |
| Kaidah Distributif | : A (B + C) = AB + AC |
| | (A + B) C = AC + BC |

*Contoh:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2.3 + (-3).6 + 5.2 & 2.5 + (-3).(-7) + 5.9 \\ 8.3 + 2.6 + 4.2 & 8.5 + 2.(-7) + 4.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 76 \\ 44 & 62 \end{bmatrix}$$

**4. Perkalian Matriks dengan Vektor**

Suatu matriks yang bukan berbentuk vektor hanya dapat dikalikan dengan sebuah vektor kolom, dengan catatan jumlah kolom matriks sama dengan dimensi vektor-kolom yang bersangkutan, hasilnya adalah berupa sebuah vektor-kolom baru.

$$\mathbf{A}_{m \times n} \times \mathbf{b}_{m \times 1} = \mathbf{c}_{m \times 1}$$

*Contoh:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 3.1 + 5.3 \\ 2.2 + 4.1 + 6.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 26 \end{bmatrix}$$

## D. Determinan Matriks

### 1. Menentukan Determinan Matriks

Determinan dari suatu matriks ialah penulisan unsur-unsur suatu matriks bujur sangkar dalam bentuk determinan, yaitu di antara sepasang garis tegak (| |). Determinan dari matriks A lazim dituliskan dengan notasi |A| atau $D_A$. Determinan berbeda dari matriks dalam tiga hal (Dumairy, 2007): *Pertama*, bahwa determinan unsur-unsurnya diapit dengan tanda kurung. *Kedua*, determinan senantiasa berbentuk bujur sangkar (jumlah baris = jumlah kolom, $m = n$), sedangkan matriks tidak harus demikian. *Ketiga*, determinan mempunyai nilai numerik tetapi tidak demikian halnya dengan matriks.

Pencarian nilai numerik dari suatu determinan dapat dilakukan dengan cara mengalikan unsur-unsur secara diagonal.

$$\text{Matriks } A\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{determinannya: } |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Nilai numeriknya : $|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Contoh:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; $|A| = 2.4 + 3.5 = 23$
- $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; $|B| = 5.8 + 3.7 = 61$

Untuk determinan berdimensi tiga:

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaiannya :

$$|A| = \underset{\textbf{(1)}}{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underset{\textbf{(2)}}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underset{\textbf{(3)}}{a_{13}a_{32}a_{21}} - \underset{\textbf{(4)}}{a_{31}a_{22}a_{13}} - \underset{\textbf{(5)}}{a_{21}a_{12}a_{33}} - \underset{\textbf{(6)}}{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

*Contoh:*

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

  $|A| = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 7.5.3 - 8.6.1 - 9.4.2$

  $= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$

- $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

  $|B| = 1.6.2 + 3.4.-1 + 0.2.0 - (-1).6.0 - 0.4.1 - 2.2.3 = -12$

**Minor dan Kofaktor**

Cara menyelesaikan determinan menggunakan cara di atas hanya dapat dilakukan sampai dengan matriks yang berdimensi tiga, tetapi tidak dapat diterapkan untuk menyelesaikan determinan matriks yang berdimensi lebih tinggi. Terkait dengan hal tersebut, Laplace mengembangan suatu solusi yang berlaku umum untuk determinan matriks berdimensi berapa pun, yaitu dengan menggunakan minor dan kofaktor dari determinan yang bersangkutan.

Perhatikan kembali penyelesaian determinan berdimensi tiga,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Dengan mengatur letak suku-sukunya, penulisan ini bisa diubah menjadi:

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33}) + (a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13})$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{i.j-1}^{n} a_{ij}M_{ij}$$

Ternyata, dengan "menutup" baris-baris dan kolom-kolom tertentu, determinan |A| terdiri atas beberapa determinan-bagian (*sub-determinant*). Determinan-determinan-bagian ini dinamakan minor. Suatu minor secara umum dilambangkan dengan notasi $M_{ij}$.

$M_{11}$ adalah minor dari unsur $a_{11}$, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-1 dari determinan | A |

$M_{12}$ adalah minor dari unsur $a_{12}$, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-2 dari determinan | A |

$M_{13}$ adalah minor dari unsur $a_{13}$, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-3 dari determinan | A |

Penulisan determinan dalam bentuk minor seperti di atas dapat diubah ke dalam penulisan dalam bentuk kofaktor. Kofaktor dari determinan | A | untuk minor tertentu $M_{ij}$ dilambangkan dengan nitasi $A_{ij}$.

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}}$$

$M_{ij}$ adalah minor dari unsur $a_{ij}$ yang diperoleh dengan jalan menutup baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari determinan | A |.

$A_{ij}$ adalah kofaktor dari unsur $a_{ij}$.

Dengan demikian,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2M_{11} = +M_{11}$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3M_{23} = +M_{12}$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4M_{13} = +M_{13}$$

Kofaktor $A_{ij}$ praktis adalah sama dengan minor $M_{ij}$ itu sendiri jika $i + j$ menghasilkan bilangan genap, dan $A_{ij}$ adalah negatif dari $M_{ij}$ apabila $i + j$ menghasilkan bilangan ganjil.

Penyelesaian determinan dalam notasi minor:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$|A| = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

Atau :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ untuk setiap baris; } i = 1,2,\ldots, n$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ untuk setiap kolom; } j = 1,2,\ldots, n$$

Cara penyelesaian determinan yang dikembangkan oleh Laplace ini, dikenal dengan sebutan metoda ekspansi dengan kofaktor, berlaku atau terap untuk determinan berdimensi berapapun.

*Contoh:*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \quad \rightarrow \quad A_{11} = (-1)^2(-3) = -3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \quad \rightarrow \quad A_{12} = (-1)^3(-6) = 6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 \quad \rightarrow \quad A_{13} = (-1)^4(-3) = -3$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1.(-3) + 2.6 + 3.(-3) = 0$$

**2. Sifat-sifat Determinan Matriks**

Determinan memiliki beberapa sifat khas berkenaan dengan nilai numeriknya, berikut akan dijelaskan sifat-sifat dari determinan matriks (Dumairy, 2007):

a. Nilai determinan adalah nol jika semua unsurnya sama.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 27 + 27 - 27 - 27 - 27 = 0$$

b. Nilai determinan adalah nol jika terdapat dua baris atau dua kolom yang unsur-unsurnya sama.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 80 + 48 + 30 - 80 - 30 - 48 = 0$$

c. Nilai determinan adalah nol jika terdapat dua baris atau dua kolom yang unsur-unsurnya sebanding

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 4 & 12 & 10 \end{vmatrix} = 160 + 96 + 60 - 160 - 60 - 96 = 0$$

d. Nilai determinan adalah nol jika unsur-unsur pada salah satu baris atau kolom semuanya nol.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

e. Nilai determinan tidak berubah jika semua baris dan kolomnya saling bertukar letak, dengan kata lain determinan dari matriks A sama dengan determinan dari matriks ubahannya.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64 = 39$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 40 + 168 - 105 - 54 - 64 = 39$$

f. Nilai determinan berubah tanda (tetapi harga mutlaknya tetap) jika dua baris atau dua kolomnya bertukar letak.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64 = 39$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 105 + 64 - 168 - 54 - 40 = -39$$

g. Determinan dari suatu matriks diagonal adalah hasilkali unsur-unsur diagonalnya.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2.4.5 = 40$$

h. Jika setiap unsur pada salah satu baris atau kolom dikalikan dengan suatu bilangan, nilai determinannya adalah sama dengan hasilkalinya dengan bilangan tersebut.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 39$ . Jika baris kedua dikalikan 2, maka:

$$|\boldsymbol{A}*| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 108 + 336 + 80 - 210 - 108 - 128 = 78 = 2|A|$$

i. Jika semua unsur merupakan penjumlahan dari dua bilangan atau lebih determinannya dapat dituliskan sebagai penjumlahan dari dua determinan atau lebih.

j. Jika nilai determinan dari suatu matriks sama dengan nol, matriksnya dikatakan singular dan tidak memiliki balikan (*inverse*). Jadi bila $|A| = 0$, **A** merupakan matriks singular dan $\mathbf{A}^{-1}$ tidak ada.

k. Jika nilai determinan dari suatu matriks tidak sama dengan nol, matriksnya dikatakan non-singular dan memiliki balikan (*inverse*). Jadi bila $|A| \neq 0$, **A** merupakan matriks non-singular dan $\mathbf{A}^{-1}$ ada.

l. Pada penguraian determinan (ekspansi Laplace), nilai determinan sama dengan nol jika unsur baris atau kolom dikalikan dengan kofaktor unsur baris atau kolom yang lain, tetapi tidak sama dengan nol jika unsur-unsur baris atau kolom dikalikan dengan kofaktor unsur baris atau kolom itu sendiri.

## E. Pengubahan Matriks (Transpose)

Mengubah (*transpose*) sebuah matriks berarti mengubah matriks tersebut menjadi sebuah matriks baru dengan cara saling menukarkan posisi unsur-unsur baris dan unsur-unsur kolomnya. *Transpose* dari matriks A dinyatakan dengan A' atau $A^t$. Hasil pengubahan suatu matriks dinamakan matriks ubahan (*transpose*), dilambangkan dengan menambahkan tanda aksen pada notasi matriks aslinya. Demikian ubahan dari matriks A adalah matriks ubahan A'. Karena dalam pengubahan terjadi pertukaran baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris, maka ubahan dari $A_{m\,x\,n}$ adalah $A'_{n\,x\,m}$ dan konsekuensinya $a_{ij} = a'_{ji}$

$$A_{m\,x\,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ubahannya : } A'_{n\,x\,m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ubahan dari suatu matriks ubahan adalah matriks aslinya. Ubahan dari suatu matriks bujur sangkar adalah matriks ubahan bujur sangkar juga. Dalam hal suatu matriks bujur sangkar sama dengan ubahannya, ia dinamakan matriks simetrik. Ubahan dari suatu matriks diagonal adalah matriks diagonal itu sendiri. Ubahan dari suatu vektor-baris adalah sebuah vektor-kolom, sebaliknya ubahan dari suatu vektor-kolom adalah sebuah vektor baris.

*Contoh:*

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ maka $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ maka $B^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

**a. Ubahan Penjumlahan dan Pengurangan**

Ubahan dari jumlah atau selisih beberapa matriks adalah jumlah atau selisih matriks-matriks ubahannya (Dumairy, 2007):

$$\boxed{(A_{m\,x\,n} \pm B_{m\,x\,n} \pm C_{m\,x\,n}I)' = A'_{n\,x\,m} \pm B'_{n\,x\,m} \pm C'_{n\,x\,m}}$$

Untuk ubahan penjumlahan, sebagaimana halnya pada operasi penjumlahan matriks, berlaku pula kaidah komutatif dan kaidah asosiatif, yaitu bahwa:

| | |
|---|---|
| komutatif | : (A + B)' = (B + A)' atau A' + B' = B' + A' |
| Asosiatif | : {A + (B + C)}' = {(A + B) + C}' = A' + B' + C' |

*Contoh:*

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

Maka:

$$(A + B + C)' = \begin{bmatrix} 10 & 19 & 12 \\ 16 & 10 & 24 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 19 & 10 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

Atau:

$$A' + B' + C' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 19 & 10 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

**b. Ubahan Perkalian**

Ubahan dari perkalian matriks dengan skalar adalah perkalian skalar dengan matriks ubahannya. Ubahan dari perkalian antar matriks adalah perkalian matriks-matriks ubahannya dengan urutan yang terbalik.

$(\lambda A)' = \lambda A'$

$$\boxed{(A_{m\,x\,n} \times B_{n\,x\,n} \times C_{n\,x\,a})' = C'_{a\,x\,n} \times B'_{n\,x\,n} \times A'_{n\,x\,m}}$$

Untuk ubahan perkalian matriks dengan skalar, sebagaimana halnya pada operasi perkalian matriks dengan skalar, berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif, yaitu bahwa :

| | |
|---|---|
| Komutatif | : $(\lambda A)' = (A\lambda)'$ atau $\lambda A' = A'$ |
| Distributif | : $\{\lambda (A \pm B)\}' = (\lambda A \pm \lambda B)' = \lambda A' \pm \lambda B'$ |

Sedangkan untuk ubahan perkalian antarmatriks, seperti halnya pada operasi perkalian antarmatriks, berlaku kaidah asosiatif dan kaidah distributif, yaitu bahwa:

| | |
|---|---|
| $\{A(BC)\}' = \{(AB)C\}' = (ABC)' = C'B'A'$ | asosiatif |
| $\left.\begin{array}{l}\{A(B \pm C)\}' = (AB \pm AC)' = B'A' \pm C'A' \\ \{(A \pm B)C\}' = (AC \pm BC)' = C'A' \pm C'B'\end{array}\right\}$ | distributif |

*Contoh*:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$ABC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 566 \\ 294 \end{bmatrix}$$

## F. Pembalikan Matriks (Inverse)

Membalik sebuah matriks berarti mencari suatu matriks balikan yang apabila dikalikan dengan matriks aslinya menghasilkan matriks satuan (Dumairy, 2007. Inverrs matrika A ialah merupakan matriks kebalikan dari A, hal tersebut dapat disimbolkan dengan $A^{-1}$. Formulasi dari matriks invers dinyatakan sebagai berikut (Supangat, 2006):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Dimana:

$|A|$ = determinan A

adj A = adjoint A = *transpose* dari matriks kofaktor

Karena invers matriks A ialah merupakan kebalikan dari matriks A-nya, maka hasil perkalian antara matriks A dengan inversnya akan menghasilkan matriks identitas (Supangat, 2006)

$$A^{-1} – A = I$$

Matriks balikan hanya terdapat pada matriks-matriks yang berbentuk bujur sangkar. Akan tetapi, sebagaimana telah disinggung sebelumnya, tidak setiap matriks bujur sangkar mempunyai balikan. Hanya matriks-matriks bujur sangkar yang nonsingular (determinannya ≠ 0) yang memiliki balikan.

**1. Pembalikan Matriks Berorde 2 X 2**

Andaikata B adalah balikan dari A, maka untuk dapat membentuk B haruslah diperoleh lebih dahulu unsur-unsurnya atau $b_{ij}$. Nilai $b_{ij}$ dapat dihitung berdasarkan penemuan seperti diuraikan berikut.

Andaikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

dan balikannya dilambangkan dengan $A^{-1}$ = B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

maka menurut definisi AB = I, yakni

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \qquad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0$$
$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \qquad a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1$$

Dengan menyelesaikan keempat persamaan ini secara serempak untuk masing-masing $b_{ij}$ diperoleh:

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad b_{11} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{11} = \frac{-a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Perhatikan bahwa faktor pembaginya tak lain adalah determinan | A |.

$$|\,A\,| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|\,A\,|} \qquad b_{12} = \frac{-a_{12}}{|\,A\,|} \qquad b_{21} = \frac{-a_{21}}{|\,A\,|} \qquad b_{22} = \frac{a_{11}}{|\,A\,|}$$

Ini berarti jika pembagian nol atau | A | = 0, maka $b_{ij}$ tak terdefinisi dan konsekuensinya matriks balikan B atau $A^{-1}$ tidak dibentuk. Itulah sebabnya matriks A tidak mempunyai balikan jika | A | = 0.

Contoh:

- Tentukan, balikan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

  $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4$, berarti **A** non-singular dan $\mathbf{A}^{-1}$ ada

$b_{11} = \frac{a_{22}}{|A|} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$b_{21} = \frac{-a_{21}}{|A|} = \frac{-5}{4} = -1{,}25$

$b_{12} = \frac{-a_{12}}{|A|} = \frac{-4}{4} = -1$

$b_{22} = \frac{a_{11}}{|A|} = \frac{8}{4} = 2$

Jadi, $\mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1 \\ -1{,}25 & 2 \end{bmatrix}$

- Tentukan, balikan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$, berarti **A** singular dan $\mathbf{A}^{-1}$ tidak ada

**2. Pembalikan Matriks Berorde lebih Tinggi**

Pembalikan matriks yang berorde lebih tinggi pada prinsipnya sama seperti pembalikan matriks berorde 2 x 2 di atas.

Andaikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Dan balikannya $A^{-1}$ = B, maka menurut definisi AB = I.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} & ---- & a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1n}b_{nn} \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ a_{n1}b_{11} + \dots + a_{nn}b_{n1} & ---- & a_{n1}b_{1n} + \dots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad c_{ik} = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$c_{ik} = 1$ jika $i = k$ di mana: $i = 1, 2, \dots, n$

$c_{ik} = 0$ jika $i \neq k$ $k = 1, 2, \dots, n$

Dengan cara ini, untuk menemukan sebanyak $n^2$ unsur-unsur matriks balikannya ($b_{ij}$) terdapat $n^2$ persamaan mengandung $b_{ij}$ yang harus diselesaikan. Jadi, jika misalnya matriks yang hendak dibalik berorde 4 x 4, berarti terdapat $4^2$ unsur matriks balikan yang sama harus dicari; untuk itu terdapat $4^2$ persamaan (yang mengandung unsur-unsur matriks balikan) yang harus diselesaikan.

**3. Pembalikan Matriks dengan Adjoin dan Determinan**

Membalik sebuah matriks dapat pula dilakukan dengan menggunakan adjoin dan determinan dari matriks yang bersangkutan. Hubungan suatu matriks bujur sangkar yang nonsingular dengan adjoin dan determinannya adalah:

$$A^{-1} = \frac{adj.\ A}{|\ A\ |}$$

Berdasarkan hubungan ini terlihat, $A^{-1}$ ada atau dapat dibentuk jika dan hanya jika $|\ A\ | \neq 0$.

**4. Penentuan Invers Matriks dengan Eliminasi Gauss**

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL), sering kali digunakan operasi sederhana, yaitu dengan mengubah SPL uang asli menjadi SPL yang *equivalent* (sepadan). Sistem yang sepadan diperoleh jika dilakukan operasi elementer untuk persamaan (Supangat, 2006).

Operasi elementer untuk persamaan:

a. Pertukaran dua persamaan.
b. Perkalian suatu persamaan dengan konstanta yang tidak sama dengan nol.
c. Persamaan ke-i digantikan oleh penjumlahan antara persamaan ke-i dengan k dikalikan persamaan ke-j, di mana k merupakan nilai konstanta dan bukan 0 (nol).

Sejalan dengan pemikiran operasi elementer untuk persamaan, maka operasi elementer untuk matriks:

a. Pertukaran dua baris.
b. Perkalian suatu persamaan dengan konstanta yang tidak sama dengan 0 (nol).
c. Penggantian baris ke-i digantikan oleh penjumlahan baris ke-i dengan k dikalikan baris ke-j, untuk k merupakan nilai konstanta dan bukan 0 (nol).

**5. Sifat-sifat Balikan**

Balikan-balikan matriks mempunyai beberapa sifat khas, yaitu (Dumairy, 2007):

a. Balikan dari suatu matriks balikan adalah matriks aslinya $[A^{-1}]^{-1} = A$.
b. Determinan dari suatu matriks balikan sama dengan kebalikan dari determinan matriks aslinya; $| A^{-1} | = 1/| A |$.
c. Balikan dari suatu matriks ubahan sama dengan ubahan dari matriks balikannya; $| A'|^{-1} = [A^{-1}]'$.
d. Balikannya dari perkalian dua buah matriks sama dengan perkalian matriks-matriks balikannya dengan urutan yang terbalik; $[AB]^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
e. Balikan dari matriks satuan adalah matriks satuan itu sendiri; $I^{-1} = I$.

**Latihan Soal**

1. Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 10 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

   Tentukanlah: (a) Determinan dari matriks A; (b) Invers matriksnya jika ada

2. Jika diketahui matriks **Z** = $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, tentukanlah invers matriksnya?

## DAFTAR PUSTAKA

Assauri, Sofjan. 2009. *Matematika Ekonomi* edisi 2. Jakarta: Rajawali Pers

Ayres, Frank & Philip A. Schmidt. 1992. *Schaum's Outline of Theory and Problems of College Mathematics* 2nd edition. New York: Mc.Graw Hill.

Carter, Michael. 2001. *Foundations of Mathematical Economics*. Massachussetts: The MIT Press.

Chiang, Alpha. C & Kevin Wainwright. 2005. *Fundamental Methods of Mathematical Economics* 4th ed. New York: Mc.Graw Hill.

Dumairy. 2007. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi edisi 2003/2004 cet-12*. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

-----------. 2013. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi: Soal Jawab* ed. Pertama, cet. 12. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta

Johannes, H dan Budiono Sri Handoko. 1980. *Pengantar Matematika Untuk Ekonomi*. Jakarta: LP3ES

Sembiring, L, dkk. 2005. *Matematika Keuangan* cet. 14. Bandung: M2S Bandung.

Simor, Carl P & Lawrence Blume. 1994. *Mathematics for Economists*. New York: WW Norton & Company.

Supangat, Andi. 2006. *Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Kencana.

Supranto, J. 2005. *Matematika Ekonomi dan Bisnis* jilid 1, edisi 2. Bogor: Ghalia Indonesia.

--------------. 2005. *Matematika Ekonomi dan Bisnis* jilid 2, edisi 2. Bogor: Ghalia Indonesia.

Werner, Frank & Yuri N. Sotskov. 2006. *Mathematics of Economics and Business*.New York: Routledge.

Widodo, Tri. 2005. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Yogyakarta: UPP AMP YKPN.

## GLOSARIUM

| | |
|---|---|
| Deret hitung | Deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan penjumlahan terhadap sebuah bilangan tertentu |
| Deret ukur | Deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan perkalian terhadap sebuah bilangan tertentu |
| Derivatif | Hasil yang diperoleh dari proses diferensiasi |
| Diferensasi | Penentuan limit suatu kuosien diferensiasi dalam hal pertambahan variabel bebasnya sangat kecil atau mendekati nol |
| Diferensial parsial | Menggambarkan bagaimanakah dampak perubahan suatu variabel apabila variabel lain dianggap konstan atau biasa dikenal dengan asumsi *ceteris paribus* |
| Fungsi | Suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara satu variabel dengan variabel lain |
| Himpunan/kumpulan (*set*) | Kumpulan atau kelompok suatu objek atau unsur yang dirumuskan secara tegas dan dapat dibeda-bedakan |
| Integral | Perhitungan kebalikan dari diferensial suatu fungsi (suatu fungsi asal yang diturunkan dapat dikembalikan ke fungsi asalnya dengan cara integral) |
| Koefisien | Bilangan atau angka yang terkait pada dan terletak di depan suatu variabel dalam sebuah fungsi |
| Konstanta | Suatu bilangan yang tetap tidak berubah-ubah |
| Limit fungsi | Untuk suatu fungsi f(x) diandaikan sebuah peubah bebas x diasumsikan mempunyai nilai tertentu yang mendekati a, maka fungsi f(x) dapat dianggap berhubungan dengan suatu himpunan nilai |
| Matriks | kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung |

| | |
|---|---|
| Matriks balikan (*inverse matrix*) | Matriks yang apabila dikalikan dengan suatu matriks bujursangkar menghasilkan sebuah matriks satuan |
| Matriks diagonal | Matriks bujursangkar yang semua unsurnya nol kecuali pada diagonal utama |
| Matriks identitas | Matriks bujursangkar yang semua unsur pada diagonal utama adalah angka-angka 1 sedangkan unsur-unsur lainnya nol |
| Matriks ortogonal | Matriks yang apabila dikalikan dengan matriks ubahannya menghasilkan matriks satuan |
| Matriks simetrik | Matriks bujursangkar yang sama dengan ubahannya |
| Matriks simetrik miring | Matriks bujursangkar yang sama dengan negatif ubahannya |
| Matriks singular | matriks bujursangkar yang determinannya sama dengan nol, matriks semacam ini tidak mempunyai balikan |
| Matriks skalar | Matriks diagonal yang unsur-unsurnya sama atau seragam |
| Matriks ubahan (*transpose matrix*) | Matriks hasil pengubahan matriks lain yang sudah ada sebelumnya, di mana unsur-unsur barisnya menjadi unsur-unsur kolom dan unsur-unsur kolomnya menjadi unsur-unsur baris |
| Pangkat dari suatu bilangan | Suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun |
| subhimpunan (sub-*set*) | Suatu himpunan yang beranggotakan satu objek atau beberapa objek |
| Titik belok (*inflection point*) | Suatu titik dimana kecekungan suatu fungsi berubah |
| Titik ekstrem | Titik yang pertambahan fungsinya mencapai posisi terendah dan kemudian menurun atau sebaliknya a merupakan titik yang pengurangan fungsinya mencapai posisi tertinggi dan kemudian meningkat |
| Variabel | unsur pembentuk fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor tertentu |
| Vektor | bentuk matriks khusus yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom |